Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 3
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Dienstag, 02.11.2010, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für eine nicht leere Teilmenge H von G die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1^{-1} \in H$ und $h_1 \cdot h_2 \in H$.

(ii) Für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.

(iii) Für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1 \cdot h_2 \in H$, und $(H, \cdot)$ ist eine Gruppe.

Hinweis: Gilt (iii), so folgern Sie zunächst, dass die neutralen Elemente von H und G übereinstimmen.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei X eine nicht leere Menge.

(i) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $G^X := \mathrm{Abb}(X, G)$ die Menge aller Abbildungen von der Menge X in die Menge G. Für $f, g \in G^X$ sei $f \cdot g$ die durch $(x \mapsto f(x) \cdot g(x))$ definierte Abbildung. Ist G^X mit dieser Verknüpfung eine Gruppe?

(ii) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K^X := \mathrm{Abb}(X, K)$ die Menge aller Abbildungen von der Menge X in die Menge K. Für $f, g \in K^X$ sei $f + g \in K^X$ bzw. $f \cdot g \in K^X$ die durch $(x \mapsto f(x) + g(x))$ bzw. die durch $(x \mapsto f(x) \cdot g(x))$ definierte Abbildung. Welche der Körperaxiome (K1) – (K10) werden von den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf K^X erfüllt und welche verletzt? Unter welchen Bedingungen an die Menge X ist $(K^X, +, \cdot)$ ein Körper?

Aufgabe 3 (4 Punkte): Betrachten Sie im Körper $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ das Element $\zeta_6 := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ bezeichne ζ_6^n die n-te Potenz von ζ_6. Bestimmen Sie $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ mit $\zeta_6^n = (a_n, b_n)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\zeta_6^0, \zeta_6^1, \zeta_6^2, \zeta_6^3, \zeta_6^4, \zeta_6^5\}$ eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei K ein Körper. Es gebe eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit der Eigenschaft, dass in K

$$n \cdot 1 := \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}} = 0$$

gilt. Es sei $p \geq 1$ die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft. Zeigen Sie, dass p eine Primzahl ist und dass für beliebige Elemente $a, b \in K$ stets $(a + b)^p = a^p + b^p$ gilt. Zeigen Sie hierfür zunächst, dass für jede natürliche Zahl j mit $1 \leq j \leq p - 1$ die ganze Zahl $\binom{p}{j}$ durch p teilbar ist.

Bemerkung: Die obige Zahl p heißt die *Charakteristik* des Körpers K. Existiert für K keine natürliche Zahl n mit der obigen Eigenschaft, so hat K per Definition die Charakteristik 0. Beispielsweise haben die Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die Charakteristik 0, und der Körper $\mathbb{F}_2$ hat die Charakteristik 2.

René DESCARTES (1596–1650)

Descartes (Renatus Cartesius) wurde in La Haye, Frankreich geboren. Der Ort ist heute nach ihm benannt. Er studierte Jurisprudenz in Poitiers und Mathematik in Paris. Ab 1617 diente er neun Jahre in verschiedenen Armeen. Er ließ sich 1628 in Holland nieder. Mit seinem umfassenden Intellekt arbeitete Descartes in vielen Bereichen: Philosophie, Mathematik, Optik, Mechanik, Meteorologie. Er ist der Begründer des Rationalismus in der Philosophie („Cogito ergo sum"). In der Mathematik führte er Koordinaten in der Geometrie ein. Dadurch hielt die Algebra Einzug in die Geometrie. Königin Christina holte ihn 1649 nach Stockholm, wo er jedoch bald an einer Lungenentzündung starb.

Georg CANTOR (1845–1918)

Cantor wurde in St. Petersburg in einem deutschen kulturellen Umfeld geboren und zog mit 11 Jahren nach Hessen. Er studierte in Zürich, Göttingen und Berlin, wo er Schüler von Weierstraß war. Ab 1869 unterrichtete er an der Universität Halle. Er gründete 1890 die Deutsche Mathematiker Vereinigung. Er erkannte, dass unendliche Mengen unterschiedliche Größe haben können. Mit seinen Ideen zur Mengenlehre und zur Topologie hatte er starken Einfluss auf die Entwicklung der modernen Mathematik. Die letzten Jahre seines Lebens litt er an manischer Depression.

Niels Henrik ABEL (1802–1829)

Abel wurde auf der norwegischen Insel Finnøy geboren. Er studierte an der Universität von Oslo und hatte schon bald ein größeres mathematisches Wissen als seine Professoren. Abel begründete die Theorie der elliptischen Funktionen und ist der Urheber der Theorie der abelschen Integrale. Ihm sind zahlreiche Sätze in der Analysis zu verdanken, sowie der Beweis der Nichtexistenz einer Lösungsformel für Gleichungen fünften Grades. In 1824 erhielt er ein staatliches Stipendium, das ihm ermöglichte von September 1825 bis Mai 1827 nach Berlin und Paris zu reisen. Er starb an Tuberkulose. Ihm zu Ehren wird jedes Jahr der Abel-Preis verliehen, der dem Nobelpreis in der Mathematik entspricht.