Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 2
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 25.10.2010, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Sind Y' und Y'' Teilmengen einer Menge Y, so definieren wir die Menge $Y' \smallsetminus Y''$ durch $Y' \smallsetminus Y'' := \{y \in Y' \mid y \notin Y''\}$ (in Worten: Y' *ohne* Y''). Es seien nun A, B und C Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ii) Es gilt $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(iii) Es gilt $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C)$.

(iv) Es gilt $A \smallsetminus (B \cap C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus C)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Gegeben seien zwei Mengen A und B, sowie eine Abbildung $f : A \to B$. Zeigen Sie:

(i) Sind M und N zwei Teilmengen von A, so gilt $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$, $f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$ und $M \subseteq f^{-1}(f(M))$. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass in den letzten beiden Fällen die Inklusionen echt sein können, aber nicht müssen.

(ii) Sind M und N zwei Teilmengen von B, so gilt stets $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$, $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$ und $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$. Wann gilt im letzten Fall Gleichheit?

Aufgabe 3 (4 Punkte): Gegeben seien Mengen X, Y und Z, sowie zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Zeigen Sie:

(i) Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv), so ist $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv).

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv), so ist f injektiv (bzw. g surjektiv).

(iii) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Nehmen Sie $X = Z$ an und konstruieren Sie ein Beispiel, in dem $g \circ f$ bijektiv, f aber nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte): (Universelle Eigenschaft des direkten Produkts) Es sei I eine Menge. Zu jedem Element $i \in I$ sei eine Menge X_i gegeben, und für $j \in I$ bezeichne $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ die durch $p_j((x_i)_{i \in I}) := x_j$ definierte j-te Projektionsabbildung. Sind X und Y Mengen, so sei $\mathrm{Abb}(X, Y) := \{\text{Abbildungen } f : X \to Y\}$ die Menge aller Abbildungen von der Menge X in die Menge Y. Zeigen Sie, dass für jede Menge X die durch $(f \mapsto (p_i \circ f)_{i \in I})$ definierte Abbildung

$$\mathrm{Abb}(X, \prod_{i \in I} X_i) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Abb}(X, X_i)$$

bijektiv ist.