Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 13
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 24.01.2011, 10:00 Uhr, Briefkästen

> Für die Klausurzulassung werden mindestens 45% der Punkte von den Blättern 1 bis 12 benötigt (das sind 86, 4 Punkte). Wer diesen Wert bislang nicht erreicht hat, kann die fehlenden Punkte über das vorliegende Blatt 13 erwerben. Da Blatt 13 klausurrelevanten Stoff behandelt, werden alle abgegebenen Lösungen auch dann korrigiert, wenn die Zulassung bereits erlangt wurde.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Die Basen $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathcal{C}'$ von $\mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{C}' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right).$$

Ferner bezeichnen $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{C}$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Für die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gelte

$$_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ sei gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Matrizen $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ mit

$$S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte): Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und die Vektoren $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $Ax = b_1$ und $Ax = b_2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass jeder affine Unterraum in K^n die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten in K ist.