Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 12
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 17.01.2011, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei K ein Körper und $K^{(\mathbb{N})}$ die Menge aller Folgen $(a_i)_{i\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ von Elementen von K mit $a_i = 0$ für fast alle i. Für zwei Elemente $(a_i)_{i\geq 0}$ und $(b_i)_{i\geq 0}$ von $K^{(\mathbb{N})}$ sei

$$\begin{aligned}(a_i)_{i\geq 0} + (b_i)_{i\geq 0} &:= (a_i + b_i)_{i\geq 0} \text{ und}\\ (a_i)_{i\geq 0} \cdot (b_i)_{i\geq 0} &:= (c_i)_{i\geq 0} \text{ mit } c_i := \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ die Menge $K^{(\mathbb{N})}$ zu einem kommutativen Ring ohne Nullteiler machen. Er heißt *der Polynomring in einer Variablen über* K. Können Sie diese Terminologie erklären?

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für eine K-lineare Abbildung $f : V \to V$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$.

(ii) f ist im Ring $\mathrm{End}_K(V)$ kein Linksnullteiler, d.h. für jede von Null verschiedene K-lineare Abbildung $g : V \to V$ gilt $f \circ g \neq 0$.

Hinweis: Wählen Sie für die Implikation $(ii) \Rightarrow (i)$ ein Komplement von $\ker(f)$ in V und betrachten Sie die Projektion g von V auf $\ker(f)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Bestimmen Sie eine Basis des Kernes und des Bildes der durch die Matrix A dargestellten $\mathbb{R}$-linearen Abbildung f_A in den beiden Fällen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte): Die beiden Matrizen A und B seien gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Zeigen Sie, dass A und B regulär sind, und bestimmen Sie ihre Inversen.

Carl Friedrich Gauß (1777–1855)
Gauß wurde in Braunschweig geboren und studierte Mathematik in Braunschweig und Göttingen. Mit 18 Jahren entdeckte er, dass das reguläre 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. 1807 wurde er Direktor der Sternwarte Göttingen und blieb dies bis zu seinem Lebensende. Zwischen 1818 und 1825 vermaß er das Königreichs Hannover. Gauß gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten. Alle Gebiete der Mathematik wurden durch seine Ideen maßgeblich befruchtet. Leider sind viele seiner Erkenntnisse unpubliziert und nur durch seine Tagebuchaufzeichnungen der Nachwelt bekannt.

Karl Weierstraß (1815–1897)
Weierstraß wurde im westfälischen Ostenfelde geboren. Auf Wunsch seines Vaters studierte er ab 1834 Jura und Wirtschaftswissenschaften in Bonn. Er beschloss jedoch, Mathematiker zu werden und verließ Bonn ohne Abschluss 1838. Drei Jahre später bestand er in Münster die Lehrerprüfung. Sein mathematisches Genie wurde erst 1854 wahrgenommen. Sogleich erhielt er die Ehrendoktorwürde der Universität Königsberg, sowie Rufe an zahlreiche Universitäten. 1956 ging er nach Berlin. Sein Hauptwerk galt der logisch korrekten Fundierung der Analysis und der Entwicklung der Funktionentheorie auf Basis der Potenzreihenentwicklungen. Darüberhinaus leistete er wichtige Beiträge zur Theorie der elliptischen Funktionen, zur Differentialgeometrie und zur Variationsrechnung.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
Leibniz wurde in Leipzig geboren und studierte dort und in Jena Philosophie, Jura und Mathematik. Ab 1667 war er Hofrat des Kurfürsten von Mainz. Er reiste nach Paris und London, wo er in die königliche Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. In 1676 wurde er Hofrat und Bibliothekar des Herzogs von Hannover. Auf sein Betreiben hin wurde 1700 die Berliner Akademie der Wissenschaften gegründet, deren Präsident er wurde. Leibniz war Universalgelehrter und arbeitete als Diplomat, Rechtsgelehrter, Mathematiker, Physiker und Historiker. Seine Algorithmen und Notationen für die Differentialrechnung sind noch heute in Gebrauch.