Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 11
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 10.01.2011, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Für eine fest gewählte Matrix $A \in K^{n\times n}$ sei die K-lineare Abbildung $\Phi_A : K^{n\times n} \to K^{n\times n}$ definiert durch $\Phi_A(B) := A \cdot B$. Die Basis $\mathcal{B}$ von $K^{n\times n}$ sei gegeben durch

$$\mathcal{B} := (E_{11}, \ldots, E_{n1}, \ldots, E_{1j}, \ldots, E_{nj}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{nn}).$$

Zeigen Sie, dass ${}_{\mathcal{B}}[\Phi_A]_{\mathcal{B}}$ die *"Blockmatrix"*

$$ {}_{\mathcal{B}}[\Phi_A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{pmatrix} \in K^{n^2\times n^2} \quad \text{ist.}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch* (bzw. *schiefsymmetrisch*), falls $B^T = B$ (bzw. falls $B^T = -B$). Zeigen Sie, dass die Teilmenge S (bzw. A) der symmetrischen (bzw. der schiefsymmetrischen) Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ einen Untervektorraum bildet. Zeigen Sie ferner, dass $\mathbb{R}^{n\times n} = S \oplus A$ gilt.

Hinweis: Ist $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig, so gilt $B = \frac{1}{2}(B + B^T) + \frac{1}{2}(B - B^T)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Die Matrix $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ sei gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie A auf Zeilenstufenform und bestimmen Sie eine Basis des von den Zeilen von A aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{Q}^{(5)}$. Geben Sie den Rang von A an und die Dimension des Kerns der durch A dargestellten $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung $f_A : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Bestimmen Sie die Ränge der folgenden rellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}, \quad B := \begin{pmatrix} t & s & t \\ s & t & s \\ t & s & t \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}.$$

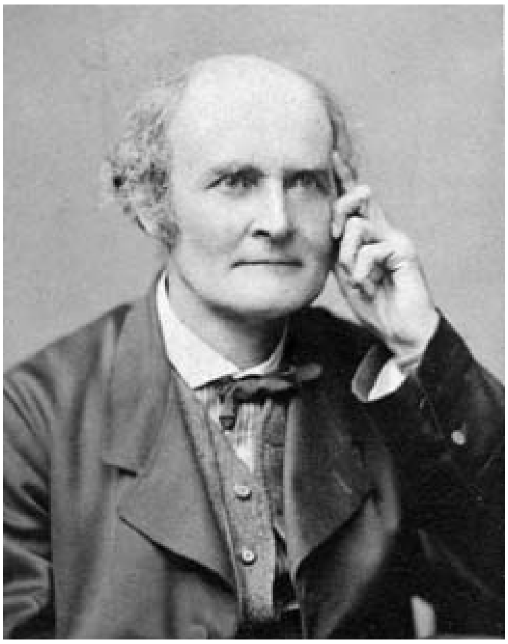
* * * * *

Wir wünschen allen Teilnehmern der Vorlesung ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch in ein glückliches und erfolgreiches Jahr 2011!

* * * * *

Hermann Günther GRASSMANN (1809–1877)
Grassmann wurde in Stettin geboren. Er studierte Theologie und Philologie in Berlin. Von 1831 an unterrichtete er Mathematik am Gymnasium in Stettin. In seinem bedeutendsten mathematischen Werk, der „Ausdehnungslehre“ definierte und untersuchte er abstrakte Vektorräume. Diese Arbeit wurde jedoch von seinen Zeitgenossen nicht verstanden und erst nach seinem Tode gewürdigt. Enttäuscht, dass er keinen akademischen Lehrstuhl bekam, wandte er sich 1862 der Sanskrit-Forschung zu. Sein Wörterbuch zum Rig-Veda ist noch heute im Gebrauch.

Leopold KRONECKER (1823–1891)
Kronecker wurde im schlesischen Liegnitz geboren. Er studierte in Berlin, Bonn und unter E. Kummer in Breslau. Nach seiner Promotion übernahm er 1845 die Verwaltung des familiären Gutes in Liegnitz. Finanziell unabhängig kehrte er 1855 nach Berlin zurück, das er zusammen mit E. Kummer und K. Weierstraß zu einem der wichtigsten mathematischen Zentren in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts machte. Er wurde 1861 in die Berliner Akademie der Wissenschaften aufgenommen, was ihm das Recht gab, an der Universität Berlin zu unterrichten. Dort wurde er 1883 Nachfolger von Kummer als Professor für Mathematik. Kroneckers Arbeiten zur Algebra, Zahlentheorie und Analysis sind von außergewöhnlicher Tiefe.



Arthur CAYLEY (1821–1895)
Cayley wurde in Richmond, England geboren. Er studierte am Trinity College in Cambridge Mathematik und unterrichtete dort ab 1842 für vier Jahre. Gleichzeitig studierte er Jura und war ab 1849 Rechtsanwalt. Im Jahre 1863 hatte er 300 mathematische Arbeiten publiziert und wurde Professor für Mathematik in Cambridge. Obwohl dies eine deutliche Einkommenseinbuße darstellte, erfüllte sich damit sein Lebenstraum. Cayley entwickelte die Theorie der Matrizen und gab als erster die Definition einer abstrakten Gruppe. Er publizierte fast 1000 Arbeiten zur Mathematik, theoretischen Dynamik und mathematischen Astronomie.