Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 10
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, 20.12.2010, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ sei gegeben durch $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 \\ x_2 + ix_3 \end{pmatrix}$. Die Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{C}^3$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ von $\mathbb{C}^2$ seien gegeben durch

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 := \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{B}}[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]$ und ${}_{\mathcal{C}}[f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Betrachten Sie im reellen Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ die Elemente f_i, gegeben durch $f_i(t) := t^i$ für jede ganze Zahl $i \geq 0$. Es sei $V := \langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\frac{d}{dt} : V \to V$ sei gegeben durch $f \mapsto \frac{df}{dt}$, wobei $\frac{df}{dt}$ die erste Ableitung von f bezeichnet. Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}[\frac{d}{dt}]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[\frac{d}{dt}]_{\mathcal{C}}$ bezüglich der Basen $\mathcal{C} := (f_0, f_0 + f_1, f_0 + f_1 + f_2, f_0 + f_1 + f_2 + f_3)$ und $\mathcal{B} := (f_0, f_1, f_2, f_3)$ von V.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Berechnen Sie alle möglichen Produkte von zwei der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C := \begin{pmatrix} 18 & 3 & 12 \\ -14 & -3 & -9 \\ -22 & -3 & -15 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$D := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Potenzen C^m von C für jede ganze Zahl $m \geq 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Die Matrix $A \in K^{n \times n}$ erfülle die Bedingung $A \cdot B = B \cdot A$ für alle Matrizen $B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass ein Element $\lambda \in K$ existiert mit $A = \lambda \cdot \mathrm{Id}_n$.

Hinweis: Betrachten Sie für $1 \leq i, j \leq n$ die Matrizen $B = E_{ij}$.