Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2010/11
Prof. Dr. U. Hartl Blatt 1
Dr. J. Kohlhaase
Abgabetermin: Montag, den 18.10.2010, 10:00 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(i) Finden Sie für die durch $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 4\}$ definierte Ebene E im $\mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung.

(ii) Betrachten Sie die in der Parameterdarstellung

$$L := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{Es gibt } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

gegebene Gerade L im $\mathbb{R}^3$. Finden Sie Elemente $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3, b, b' \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \text{ und } a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = b'\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Die Gerade G im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad \text{und} \qquad x_1 - x_2 = 0.$$

Für eine fest gewählte reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ sei die Gerade H_a im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Gleichungen

$$x_1 + x_3 = 2 \qquad \text{und} \qquad ax_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von a sich die Geraden G und H_a schneiden bzw. für welche Werte sie gleich, parallel oder windschief sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene oder eine Gerade. Zeigen Sie: Sind $P, Q \in M$, so gilt auch $P + \mu(Q - P) \in M$ für jedes Element $\mu \in \mathbb{R}$. Folgern Sie:

(i) Ist M eine Gerade, sind $P, Q \in M$ mit $P \neq Q$, und ist M' die Gerade

$$M' := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{Es gibt } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } x = P + \lambda(Q - P)\},$$

so gilt $M = M'$.

Hinweis: Nach dem oben Gezeigten gilt $M' \subseteq M$, sodass Sie $M \subseteq M'$ beweisen müssen. Machen Sie sich zunächst klar, dass es hier tatsächlich etwas zu zeigen gibt!

(ii) Ist M eine Ebene, und ist $G \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade, die M in mindestens zwei Punkten schneidet, so gilt $G \subset M$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$\Phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definierte Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y)$.

(ii) Ist $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die durch eine Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ mit $a_3 \neq 0$ gegeben ist, so existiert zu jedem Element $z \in \mathbb{R}^2$ genau ein Element $x \in E$ mit $\Phi(x) = z$. Welche geometrische Bedeutung hat die Abbildung Φ? Welche geometrische Struktur besitzt die Menge $\Phi(E) := \{\Phi(x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in E\}$ im Falle $a_3 = 0$?

Prof. Dr. U. Hartl
Dr. J. Kohlhaase

Meist werden in der Mathematik verschiedene Strukturen (z.B. Gruppen, Vektorräume, Körper usw. oder deren Elemente) mit verschiedenen Schriftarten bezeichnet, um sie einfacher unterscheiden zu können. Die gebräuchlichsten Schriftarten sind die folgenden:

Das **griechische** Alphabet

Alpha	α	A	Ny	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omikron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π	Π
Epsilon	ϵ ε	E	Rho	ρ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ ϑ	Θ	Ypsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Phi	ϕ φ	Φ
Kappa	κ	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
My	μ	M	Omega	ω	Ω

Der einzige in der Mathematik aus dem **hebräischen** Alphabet benötigte Buchstabe

Aleph $\aleph$

Die **gotischen** Buchstaben

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{n}$	$\mathfrak{N}$
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{o}$	$\mathfrak{O}$
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{P}$
$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{Q}$
$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{R}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{F}$	ſ $\mathfrak{s}$ ß	$\mathfrak{S}$
$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{T}$
$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{U}$
$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{V}$
$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{W}$
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{X}$
$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{Y}$
$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{Z}$

Die **deutsche** Schrift („Sütterlin“)