Algebra
WS 02/03

Dr. Urs Hartl
Immanuel Herrmann

Anwesenheitsaufgaben

1. Betrachten Sie den Ring $R := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Ideale?

   (a) $M_1 := \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

   (b) $M_2 := \{(a, b) \mid a = 0 \text{ oder } b = 0\}$

   (c) $M_3 := \{(a, 0) \mid a \text{ ist gerade}\}$

   (d) $M_4 := \{(a, b) \mid a \text{ ist gerade}, b \in \mathbb{Z}\}$

   (e) $M_5 := \{(a, b) \mid a \text{ ist ungerade}, b \in \mathbb{Z}\}$

   (f) $M_6 := \{(a, b) \mid a \text{ ist gerade und } b \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

   (g) $M_7 := \{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

   (h) $M_8 := \{(a, b) \mid a \geq 0, b \geq 0\}$

   (i) $M_9 := \{(0, 0)\}$

   (j) $M_{10} := \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$

2. Betrachten Sie den Ring $R := \mathbb{Z}/(10)$.

   (a) Gibt es ein Ideal I von R mit $\bar{4} \in I$ aber $\bar{2} \notin I$?

   (b) Was ist das von $\bar{0}$ erzeugte Ideal? Und von $\bar{1}$? Und von $\bar{2}$? Etc. bis $\bar{9}$.

   (c) Sind das schon alle Ideale von R?

3. Wie viele p-Sylow-Untergruppen kann eine Gruppe G haben, wenn...

   (a) ... $p = 2$, $\#G = 24$?

   (b) ... $p = 3$, $\#G = 24$?

   (c) ... $p = 3$, $\#G = 60$?

   (d) ... $p = 7$, $\#G = 35$?

4. (a) Was sind die p-Sylow-Untergruppen von C_{12} für $p = 2, 3, 5$?

   (b) Was sind die p-Sylow-Untergruppen von S_4 für $p = 3, 5$? (Wenn Ihnen das zu leicht war: Was sind die 2-Sylow-Untergruppen von S_4?)

   (c) Kann eine abelsche Gruppe mehrere p-Sylow-Untergruppen für ein festes p haben? (Hinweis: Einer der Sylow-Sätze sagt, dass alle p-Sylow-Untergruppen konjugiert sind. Welche Konjugierten hat eine Untergruppe H einer abelschen Gruppe G?)