Seminar über die Mumford-Vermutung

Johannes Ebert; ebert@math.uni-bonn.de

Die *Abbildungsklassengruppe* $\Gamma_{g,n}$ ist die Gruppe der Homotopieklassen von Diffeomorphismen einer orientierten Fläche vom Geschlecht g mit n Randkomponenten. Es handelt sich um sehr komplizierte Gruppen.
Durch eine Reihe von Arbeiten von J. Harer, S. Morita, U. Tillmann, I. Madsen, M. Weiss und S. Galatius ist aber die Homologie von $\Gamma_{g,n}$ gut verstanden, zumindest in kleinen Graden.
Das Hauptresultat lautet

Theorem 0.1. *(Madsen-Weiss) Es gibt Kohomologieklassen $\kappa_n \in H^{2n}(B\Gamma_{g,n};\mathbb{Z})$ (alle $n \in \mathbb{N}$), so dass der induzierte Homomorphismus von graduierten Algebren*

$$\mathbb{Q}[\kappa_1, \kappa_2, \ldots] \to H^*(B\Gamma_{g,n};\mathbb{Q})$$

ein Isomorphismus ist, solange der Grad kleiner als $g/2$ ist.

Dies wurde vor 25 Jahren von Mumford vermutet und im Jahre 2002 von Madsen und Weiss ([9]) bewiesen.
Der Beweis in [9] ist sehr lang und technisch, es gibt aber seit kurzem einen neuen und viel einfacheren Beweis ([4]). Das Ziel des Seminars ist es, diesen neuen Beweis von Theorem 0.1 zu verstehen.
Die wichtigste Zutat für den Beweis is *Harer's Stabilitätssatz* ([6]), den wir nur als "black box" benutzen werden, weil der Beweis mindestens ein weiteres halbes Semester erfordern würde. Harer's Stabilitätssatz besagt grob, dass die Gruppenkohomologie $H_k(\Gamma_{g,n},\mathbb{Z})$ unabhängig von g und n ist, falls $k > g/2$.

Ansonsten beruht der Beweis von 0.1 auf Methoden der Differentialtopologie und Homotopietheorie.

Zur Erleichterung der Orientierung sei ein Überblick über den Beweis von 0.1 gegeben.
Madsen und Tillmann konstruieren in [8] ein Spektrum $\mathbb{G}_{-2}^{SO}$ und eine Abbildung $\alpha : B\Gamma_{g,n} \to \Omega^\infty \mathbb{G}_{-2}^{SO}$ mittels Thom-Pontryagin-Konstruktion. $\mathbb{G}_{-2}^{SO}$ ist ein Thom-Spektrum, ähnlich den Spektren der gewöhnlichen Bordismustheorie (der index deutet an, dass die beteiligten Mannigfaltigkeiten zweidimensional sind, SO deutet an, dass sie orientiert sind. Man kann relativ leicht sehen, dass es eine Abbildung $\phi : \Omega_0^\infty \mathbb{G}_{-2}^{SO} \to BU$ gibt, welche einen Isomorphismus in rationaler Homologie induziert und so dass $\kappa_n = \alpha^* \phi^* s_n$ gilt. Also folgt Theorem 0.1 aus

Theorem 0.2. *Die Abbildung $\alpha : B\Gamma_{g,n} \to \Omega_0^\infty \mathbb{G}_{-2}^{SO}$ induziert einen Isomorphismus in ganzzahliger Homologie in Graden $< g/2$.*

Für den Beweis benutzen Galatius, Madsen, Tillmann und Weiss Kobordismuskategorien. $\mathcal{C}_d^{SO}$ ist die topologische Kategorie, deren Objekte $d-1$-dimensionale kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten sind; und deren Morphismen genau die orientierten Bordismen zwischen $d-1$-Mannigfaltigkeiten sind. Sehr wichtig ist weiterhin eine gewisse Unterkategorie $\mathcal{C}_{d,b}^{SO}$ mit Zusammenhangsbedingungen an die Bordismen. Die Morphismenräume sind klassifzierende Räume für Diffeomorphismengruppen. Es gibt Abbildungen

$$B\Gamma_{g,n} \simeq B\,\mathrm{Diff}(F_{g,n}) \to \Omega B\mathcal{C}_{2,b}^{SO}$$

in den Schleifenraum des klassifizierenden Raumes der Kategorie $\mathcal{C}_d^{SO}$. Der erste große Schritt auf dem Weg zu Theorem 0.2 ist der folgende Satz von Ulrike Tillmann ([15]).

Theorem 0.3. *Die Abbildung*

$$B\Gamma_{g,n} \to \Omega B\mathcal{C}_{2,b}^{SO}$$

induziert einen Isomorphismus in ganzzahliger Homologie (in kleinen Graden)

Der Beweis beruht auf Harers Satz und auf dem "group completion theorem". Es ist der einzige Teil, der spezielle Resultate über Flächen benutzt und sich nicht auf andere Dimensionen verallgemeinern laässt.

Der weitere Beweis beruht auf einer Abbildung $B\mathcal{C}_d^{SO} \to \Omega^{\infty-1}\mathbb{G}_{-d}^{SO}$, welche aus der Pontryagin-Thom-Konstruktion kommt.

Theorem 0.4. $B\mathcal{C}_d^{SO} \to \Omega^{\infty-1}\mathbb{G}_{-d}^{SO}$ *ist eine Homotopieäquivalenz (für alle Werte von d).*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Thom über die Isomorphie von Bordimusgruppen mit Homotopiegruppen von Thomspektren. Weil die Komposition

$$B\Gamma_{g,n} \to \Omega B\mathcal{C}_{2,b}^{SO} \to \Omega B\mathcal{C}_2^{SO} \to \Omega^{\infty}\mathbb{G}_{-d}^{SO}$$

mit α identifiziert werden kann, fehlt zum Beweis von 0.2 nur noch

Theorem 0.5. *Die Inklusion* $\mathcal{C}_{d,b}^{SO} \subset \mathcal{C}_d^{SO}$ *induziert eine Homotopieäquivalenz* $B\mathcal{C}_{d,b}^{SO} \simeq B\mathcal{C}_d^{SO}$.

Im Seminar werden wir die Sätze 0.3, 0.4 und 0.5 beweisen, und zwar in dieser Reihenfolge. Die Vorträge haben recht unterschiedlichen Charakter. Die Vorträge 6, 7, 8 sind recht unproblematisch, weil nur eine Quelle benutzt werden muss, die ausserdem sehr detailiert ist. Den Vortrag 2 würde ich gerne selber halten. Alle anderen Vortragenden sollten unbedingt mit mir Rücksprache halten.

Vorträge

1. 23.10.:Einführung

   Diffeomophismengruppen von Flächen, Abbildungsklassengruppen. Zusammenhang mit Teichmüllertheorie. Literatur: [3], [7].
   Stabilisierung der Abbildungsklassengruppen; Harer-Stabilitätssatz. [6] Definition der Mumford-Klassen ([11]) und Mumford's Vermutung. Die ersten drei Seiten von [10] sind eine gute Zusammenfassung dieser Themen. Eventuell: Der Transfer und die Umkehrabbildung ([2]). Theorem 4.3 in [2] liefert die Verbindung von Transfer und Mumford-Klassen. Sonst passt das auch ganz gut in Vortrag 2.

2. 30.10: Die Thomspektren und die Abbildung α

   Konstruktion des Spektrums $\mathbb{G}^{SO}_{-d}$ (siehe [4], S. 12-14), die Abbildung $\alpha : B\Gamma_\infty \to \Omega^\infty \mathbb{G}^{\mathrm{SO}}_{-2}$ (am besten ist die Darstellung in [5], S. 7-10, wo eine andere Notation benutzt wird). Das Madsen-Weiss-Theorem 0.2, auch die Version in [9] sollte erwähnt werden.
   Ferner soll im Vortrag erklärt werden, wie die Mumford-Vermutung aus Theorem 0.2 folgt. Dies folgt aus Proposition 3.1 und Remark 3.2 in [4] sowie aus Lemma 2 in [14].
   Je nach Wissenstand der Seminarteilnehmer sollten Grundbegriffe der stabilen Homotopietheorie hier erklärt werden: Die Funktoren Σ^∞ und Ω^∞, Spektrumskohomologie und andere.

3. 6.11.: Die Kobordimuskategorien
   Definition der Kobordismuskategorien ([4], S. 4-6, [8], p. 516-519). Klassifizierende Räume von topologischen Kategorien ([13]) im Allgemeinen.
   Faktorisierung der Madsen-Tillmann-Abbildung α als $B\Gamma_\infty \to \Omega B\mathcal{C}_{2,b} \to \Omega B\mathcal{C}_2 \to \Omega^\infty \mathbb{G}^{\mathrm{SO}}_{-2}$.
   Formulierung des Main Theorem in [4] sowie von Theorem 6.1 in [4]

4. 13.11.: Gruppenvervollständigung und Theorem 0.3

   In diesem Vortrag soll Theorem 0.3 bewiesen werden. ([4], S. 30 ff.). Zentrales Hilfsmittel ist das Group Completion Theorem. Eine gute, nichttechnische Darstellung findet sich in [1].
   Eine andere (einfachere) Anwendung des Group Completion Theorems und des Hauptsatzes 0.4 ergibt sich für $d = 0$: Es gibt eine Homologieäquivalenz $\mathbb{Z} \times B\Sigma_\infty \to Q(\mathbb{S}^0)$.

5. 20.11.: Homotopietheorie von Garben

In diesem Vortrag soll die zentrale abstrakte Technik für die Beweise von 0.4 und 0.5 eingeführt werden: Die Homotopie- bzw. Konkordanztheorie von Garben. Hauptquelle ist [9], S. 10-11, 15-16 sowie 35-37 (Homotopiekolimites werden in [4] *nicht* benutzt). Die wichtigsten Aussagen sind Proposition 2.4.3, 2.4.4 und Theorem 4.1.2. Die Beweise finden sich zum größten Teil im Anhang von [9].

6. 27.11.: Beweis von Satz 0.4

In diesem Vortrag soll der Satz 0.4 bewiesen werden ([4], p. 8-11, 14-21). Die Strategie ist wie folgt: Die durch die Räume $B\mathcal{C}_d$ und $\Omega^{\infty-1}\mathbb{G}^{\mathrm{SO}}_{-d}$ definierten Garben sowie die Abbildung α werden explizit beschrieben. Wichtigstes Hilfsmittel ist Philip's Submersionssatz ([12]), der ausführlich zitiert werden sollte.

7. 4.12.: Beweis von Satz 0.5, Teil 1

Literatur: [4], S. 21- 26. Dieser Vortrag ist von den Methoden her elementar, aber technisch und enthält eine subtile geometrische Konstruktion.

8. 11.12.: Beweis von Satz 0.5, Teil 2

Literatur: [4], S.26-30.

References

[1] Adams: Infinite loop spaces, Infinite loop spaces. Annals of Mathematics Studies, 90. Princeton University Press, 1978

[2] Becker, Gottlieb: The transfer map and fiber bundles. Topology 14 (1975), 1–12.

[3] Earle, Eells: A fiber bundle description of Teichmüller theory, J. Diff. Geom. 3 (1969), p. 19-43

[4] Galatius, Madsen, Tillmann, Weiss: The homotopy type of the cobordism categroy, preprint, ArXic, 2006

[5] Galatius, Nadsen, Tillmann: Divisibility of the Morita-Mumford classes, University of Aarhus preprint, 2005, online erhältlich: http://www.imf.au.dk/cgi-bin/dlf/viewpublications.cgi

[6] Harer: Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces, Ann. Math. 121, 215-249.

[7] Ivanov, Nikolai: *Mapping Class Groups*. In: Handbook of geometric topology, ed. by R.J. Daverman and R. B. Sher, 2002, p. 523-633.

[8] Madsen, Tillmann: The mapping class group and $Q\mathbb{C}\mathcal{P}^\infty$. Invernt. Math, 145 (2001)

[9] Madsen, Weiss: The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumfords conjecture, preprint, ArXiv, 2004

[10] Madsen, Weiss: The stable mapping class group and stable homotopy theory. European Congress of Mathematics, 283–307, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005. Online erhältlich auf Michael Weiss' homepage: http://www.maths.abdn.ac.uk/ mweiss/pubtions.html

[11] Morita: Characteristic classes of surface bundles, Invernt. Math. 90 (1987), 551-577.

[12] Phillips: Submersions of open manifolds, Topology 6 (1966), p. 171-206.

[13] Segal: Classifying spaces and spectral sequences, Publ. IHES 34 (1968)

[14] Segal: The stable homotopy of $\mathbb{CP}^\infty$, Quart J. Math. Oxford (2), 24 (1973), p.1-5.

[15] Tillmann: The stable homotopy of the mapping class group, Invent. Math, 130 (1997)