

Homologie und Homotopie – eine Wiederholung

Manuel Amann

10. November 2005

Der Vortrag soll kurz die zwei grundlegenden Teilgebiete der Algebraischen Topologie, nämlich (Ko)Homologie- und Homotopietheorie, vorstellen. Im Rahmen der Homologie werden wir nach einer axiomatischen Einführung mit der singulären und der CW-Homologie zwei konkrete Realisierungen näher beleuchten.

1 Axiome für eine Homologietheorie

Definition 1.1. *Eine Homologie-Theorie ist ein kovarianter Funktor h_* der Kategorie der Paare topologischer Räume (mit stetigen Abbildungen, die die Paarstruktur respektieren, als Morphismen) in die Kategorie der gradierten abelschen Gruppen. Jedem Raumpaar (X, A) und jedem $p \in \mathbb{Z}$ wird eine abelsche Gruppe (oder ein R -Modul über einem unitären kommutativen Ring R) und jeder stetigen Abbildung von Paaren ein Gruppenhomomorphismus $f_* : h_p(X, A) \rightarrow h_p(Y, B)$ auf funktorielle Art und Weise zugeordnet, d.h. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ und $\text{id}_* = \text{id}$. Weiter wird zu jedem Raumpaar (X, A) und jedem $p \in \mathbb{Z}$ die Existenz eines Gruppenhomomorphismus $\partial : h_p(X, A) \rightarrow h_{p-1}(A)$ gefordert. ((A) steht kurz für (A, \emptyset)). Die Abbildung ∂ soll dabei natürlich sein, also für jede induzierte Abbildung f_* zwischen Raumpaaren $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$ liefern. Weiter sollen die folgenden Axiome gelten:*

1. Exaktheit: Für die Inklusionen $i : A \hookrightarrow X$ und $j : X \hookrightarrow (X, A)$ ist die lange Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\partial} h_p(A) \xrightarrow{i_*} h_p(X) \xrightarrow{j_*} h_p(X, A) \xrightarrow{\partial} h_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

exakt.

2. Homotopie: Sind zwei stetige Abbildungen $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotop (d.h. es gibt eine stetige Abbildung $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ mit $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$, so sind die induzierten Gruppenhomomorphismen gleich, d.h.: $f_* = g_*$.

3. Ausschneidung: Sei (X, A) ein Raumpaar und $U \subseteq X$ offen mit $\bar{U} \subseteq \text{int}(A)$. Ferner sei $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ die Inklusion. Dann ist $i_* : h_*((X \setminus U), (A \setminus U)) \rightarrow h_*(X, A)$ ein Isomorphismus.
4. Dimension: Die Theorie heißt klassisch, wenn sie noch zusätzlich dieses Axiom erfüllt: Für den Einpunkt-Raum $\{pt\}$ gilt: $h_p(\{pt\}) = 0$ für $p \neq 0$. Dann heißt $G = h_0(X)$ die Koeffizientengruppe.

Homologietheorien, die diese Axiome erfüllen sind auf großen Klassen von Räumen (i.B. endlichen CW-Komplexen) schon durch ihre Koeffizientengruppe festgelegt. Wir betrachten im folgenden zwei Homologietheorien – singuläre und CW-Homologie –, d.h. zeigen durch zwei konkrete Konstruktionen die Existenz einer solchen axiomatisch eingeführten Homologietheorie. Beide Konstruktionen erfüllen somit alle geforderten Axiome, was im einzelnen – insbesondere was Homotopie und Ausschneidung angeht – jedoch etwas aufwändiger nachzuprüfen ist.

2 Singuläre Homologie

Sei \mathbb{R}^∞ der Vektorraum aller abbrechenden reellen Folgen – die also schließlich konstant 0 werden – mit Standardbasis e_0, e_1, e_2, \dots .

Definition 2.1. Der Raum $\Delta_p = \{x = \sum_{i=0}^p r_i e_i \mid r_i \in \mathbb{R}, r_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^p r_i = 1\}$ (in der Unterraumtopologie von \mathbb{R}^∞) heißt das Standard p -Simplex mit baryzentrischen Koordinaten r_i .

Demnach ist Δ_0 ein Punkt, Δ_1 eine Strecke (der euklidischen Länge 1), Δ_2 ein Dreieck, Δ_3 ein Tetraeder, \dots

Definition 2.2. Für $p, n \in \mathbb{N}_0$ und $v_0, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ nennen wir die Abbildung $[v_0, \dots, v_p] : \Delta_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $\sum_{i=0}^p r_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^p r_i v_i$ ein affines singuläres p -Simplex.

Man beobachte, daß das Bild von $[v_0, \dots, v_p]$ genau die konvexe Hülle von $\{v_0, \dots, v_p\}$ ist. Dabei ist nicht ausgeschlossen, daß die Vektoren v_0, \dots, v_p linear abhängig sind. In diesem Falle heißt das Simplex „ausgeartet“. So ist z.B. $[e_0, e_1, e_2, e_2]$ kein Tetraeder sondern ein Dreieck. Das Symbol $\hat{}$ soll im folgenden Auslassung bedeuten. Damit ist $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p]$ das affine singuläre $(p-1)$ -Simplex, das die „Seite“ ohne e_i -Komponente repräsentiert.

Definition 2.3. Man schreibt $F_i^p = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p] : \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ und nennt diese Abbildung die i -te Seitenabbildung F_i^p .

Die Namensgebung läßt sich in die Vorstellung übertragen: Das affine 2-Simplex $[e_0, e_1, e_2]$, das Dreieck, hat als „Seiten“ die Bilder der Seitenabbildungen $[e_0, e_1]$, $[e_0, e_2]$, $[e_1, e_2]$.

Definition 2.4. Sei X ein topologischer Raum und $p \in \mathbb{N}_0$. Wir nennen jede stetige Abbildung $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ ein singuläres p -Simplex in X . Die p -te singuläre Kettengruppe $\Delta_p(X)$ (mit Koeffizienten in \mathbb{Z}) ist die freie abelsche Gruppe, die von allen singulären p -Simplices erzeugt wird. Der Randoperator ist der Gruppenhomomorphismus $\partial_p : \Delta_p(X) \rightarrow \Delta_{p-1}(X)$ mit $\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\sigma \circ F_i^p)$ für jedes singuläre p -Simplex σ in X ; also definiert auf Erzeugern. Man nennt $\partial_p \sigma$ auch den Rand von σ .

Man rechnet nach, daß $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Setzt man noch zusätzlich $\Delta_p(X) = \{0\}$ für $p < 0$ und $\partial_p = 0$ für $p \leq 0$, dann erhält man einen Kettenkomplex über ganz \mathbb{Z} . Setzt man nun die Menge der p -Zykel $Z_p(X) = \ker \partial_p$ und die Menge der p -Ränder als $B_p(X) = \text{im } \partial_{p+1}$, so gilt $B_p(X) \subseteq Z_p(X)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ wegen $\partial^2 = 0$ und wir definieren

Definition 2.5. Die p -te singuläre Homologiegruppe eines topologischen Raumes X ist die Faktorgruppe

$$H_p^{\text{sing}}(X) = Z_p(X) / B_p(X) = \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1}$$

Zwei Ketten $c, c' \in \Delta_p(X)$ heißen homolog, wenn $c - c' \in \partial_{p+1} \Delta_{p+1}(X)$.

Man setzt $\Delta_p(X, A) = \Delta_p(X) / \Delta_p(A)$ für ein Raumpaars (X, A) , beobachtet, daß der Randoperator ∂ die Paarstruktur respektiert – d.h. es gilt: $\partial_{p+1} : \Delta_{p+1}(A) \rightarrow \Delta_p(A)$ – und definiert analog relative singuläre Homologie für (X, A) als

$$H_p^{\text{sing}} = H_p(\Delta_*(X, A))$$

(Man beachte, daß die Gruppe $\Delta_p(X, A)$ wieder frei ist, da man sie als die freie abelsche Gruppe über alle singulären Simplices auffassen kann, die nicht ganz in A liegen.)

Homologie mit Koeffizienten in einem Modul M über einem unitären kommutativen Ring definiert sich, in dem man auf dem Niveau der Kettenkomplexe mit M tensoriert und als Differential die trivial induzierte Abbildung $\partial \otimes 1$ nimmt.

Nun definieren wir das hierzu duale Konzept der Kohomologiegruppen. Dazu beginnen wir wieder auf der Ebene der Kettenkomplexe. Sei $\Delta_*(X)$ der simpliziale Komplex der singulären Simplices. Wir definieren einen Kokettenkomplex $\Delta^*(X)$ durch $\Delta^*(X) = \text{Hom}(\Delta_*(X), \mathbb{Z})$. D.h., jedem erzeugenden Element, jedem singulären Simplex von $\Delta_*(X)$, ordnet man ein Element der Gruppe (hier: \mathbb{Z}) zu und setzt das linear fort. Der Korandoperator $\delta_p : \Delta^p(X) \rightarrow \Delta^{p+1}(X)$ wird definiert durch Komposition: Für ein Element $\varphi \in \Delta^p(X)$ ist $\delta_p \varphi$ die Komposition $\Delta_{p+1} \xrightarrow{\partial} \Delta_p \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$, also $\delta_p \varphi = \varphi \circ \partial_{p+1}$. Oder, definiert auf den Basiselementen von $\Delta_{p+1}(X)$, den singulären Simplices σ , erhält man:

$$\delta_p \varphi(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \varphi(\sigma \circ F_i^{p+1})$$

Wieder gilt $\delta^2 = 0$, da $\delta^2 \varphi = \partial^2 \circ \varphi = 0$ und man erhält den Kokettenkomplex

$$0 \xrightarrow{\delta} \Delta^0(X) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Delta^p(X) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Definiert man analog *Kozykel* als $\ker \delta$ und *Koränder* als $\text{im } \delta$, so erhält man:

Definition 2.6. Die p -te (singuläre) Kohomologiegruppe (mit \mathbb{Z} -Koeffizienten) eines topologischen Raumes X ist die Faktorgruppe:

$$H_{\text{sing}}^p(X) = \ker \delta_p / \text{im } \delta_{p-1}$$

Man beobachte weiter, daß die Konstruktionen funktoriell sind, d.h. H_*^{sing} ist ein kovarianter, H_{sing}^* ein kontravarianter Funktor aus der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der (gradierten) abelschen Gruppen. Dazu beobachtet man, daß eine stetige Abbildung f zwischen topologischen Räumen X, Y auf der Menge der singulären Simplices eine Abbildung $(\sigma : \Delta_p \rightarrow X) \mapsto (f \circ \sigma : \Delta_p \rightarrow Y)$ induziert, die sich linear zu einem Gruppenhomomorphismus auf den Kettengruppen fortsetzt:

$$f_{\Delta} : \Delta_p(X) \rightarrow \Delta_p(Y) \quad f_{\Delta} \left(\sum_i n_i \sigma_i \right) = \sum_i n_i (f \circ \sigma_i)$$

Die Abbildung ist eine Kettenabbildung, d.h. sie kommutiert mit Differentialen: $f_{\Delta} \circ \partial_p = \partial_p \circ f_{\Delta}$. Damit induziert f auch auf Homologiegruppen einen Homomorphismus: Definiere $f_* : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ durch $f_*([a]) = [f_{\Delta}(a)]$. Das ist wohldefiniert, denn so $a = \partial b$, folgt $f_{\Delta}(a) = f_{\Delta}(\partial(b)) = \partial f_{\Delta}(b)$ und $f_*([a]) = 0$. Weiter folgen für zwei solche stetige Abbildungen f, g direkt die zwei Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (f \circ g)_* &= f_* \circ g_* \\ \text{id}_* &= \text{id} \end{aligned}$$

womit also H_*^{sing} ein Funktor ist. Ähnliches gilt für H_{sing}^* jedoch mit „umgekehrten Pfeilen“, geschuldet der Definition:

$$f^{\Delta} : \Delta^p(Y) \rightarrow \Delta^p(X) \quad f^{\Delta}(\varphi) = \varphi \circ f_{\Delta}$$

(Man beachte die Reihenfolge der Verknüpfung, d.h., die ganze Zeit (Homotopie, Homologie) hat man es mit Abbildungen in den fraglichen Raum zu tun, jetzt mit Abbildungen des Raumes in einen anderen.) f^{Δ} setzt sich fort zu einem Homomorphismus f^* in Kohomologie.

Der Ein-Punkt-Raum ist mehr oder weniger der einzige, dessen singuläre Homologie relativ simpel auszurechnen ist, weswegen wir das beispielhaft durchführen wollen.

Satz 2.7. Sei X der Ein-Punkt Raum. Dann gilt $H_*^{\text{sing}}(X) = \mathbb{Z}$, d.h. $H_0^{\text{sing}}(X) = \mathbb{Z}$ und $H_p^{\text{sing}}(X) = 0$ für $p \neq 0$. Weiter wird $H_0^{\text{sing}}(X)$ erzeugt vom einzigen Nullsimplex.

Beweis. Für jedes $p \geq 0$ existiert genau eine Abbildung $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow X$ und $\Delta_p(X) = \langle \sigma_p \rangle \cong \mathbb{Z}$ für $p \geq 0$. Ferner gilt für alle $0 \leq i \leq p$, daß $\sigma_p \circ F_i^p = \sigma_{p-1}$. (D.h.: Alle $p+1$ Seiten von σ_p fallen mit σ_{p-1} zusammen.) Daher gilt:

$$\partial_p \sigma_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } p \text{ ungerade} \\ \sigma_{p-1} & \text{für } p \text{ gerade} \end{cases}$$

Das bedeutet, daß $\partial_p = 0$ für ungerade p und $\partial_p : \Delta_p(X) \rightarrow \Delta_{p-1}(X)$ ein Isomorphismus für gerade Zahlen $p \neq 0$ ist. Also gilt $H_0^{\text{sing}}(X) = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 = \Delta_0(X) / \{0\} \cong \Delta_0(X) = \langle \sigma_0 \rangle \cong \mathbb{Z}$. Für $p \neq 0$ ist stets $\ker \partial_p = \text{im } \partial_{p+1}$ und $H_p^{\text{sing}}(X) = 0$. \square

3 CW-Homologie

Zur Konstruktion der CW-Homologie brauchen wir folgende Fakten über (singuläre) Homologie:

Lemma 3.1. *Es gilt:*

$$H_p^{\text{sing}}(\mathbb{D}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } p = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad H_p^{\text{sing}}(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } p = n > 0 \vee (p = 0 \wedge n > 0) \\ 0 & \text{für } p \neq n \wedge p \neq 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{für } p = n = 0 \end{cases}$$

BEWEISSKIZZE. Die Scheibe \mathbb{D}^n mit $(n \in \mathbb{N}_0)$ ist kontrahierbar und hat daher mittels des Homotopieaxiomes die Homologie eines Punktes. Das Resultat über die Sphäre kann z.B. mittels der Zerlegung in (erweiterte) obere und untere Hemisphäre und einem Mayer-Vietoris Argument erreicht werden. \square

Damit folgt nun

Lemma 3.2. *Wir erhalten für das Paar $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$:*

$$H_p^{\text{sing}}(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } p = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

BEWEISSKIZZE. Diese Aussage folgt direkt aus Lemma 3.1 und der exakten Sequenz des Paares. \square

Damit kommen wir nun zu einem entscheidenden Ergebnis über Räume die durch Adjunktion eines n -Balles entstehen.

Satz 3.3. *Sei Y ein topologischer Raum, $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und $X = Y \cup_f \mathbb{D}^n$. Dann gilt:*

$$H_p^{\text{sing}}(X, Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } p = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

BEWEIS. Sei $V = \mathbb{D}^n \setminus \frac{1}{2}\mathbb{D}^n$ eine offene Tubenumgebung von $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$. Dann ist $U := Y \cup_f V$ offen und stetig nach Y deformierbar, also insbesondere $U \simeq Y$ und das Homotopieaxiom liefert $H_*^{\text{sing}}(X, Y) \cong H_*^{\text{sing}}(X, \bar{U})$. Hier läßt sich U nun ausschneiden – da $U = \text{int}\bar{U}$ – und es folgt $H_*^{\text{sing}}(X, \bar{U}) \cong H_*^{\text{sing}}(\mathbb{D}^n \setminus V, \partial V) \cong H_*^{\text{sing}}(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$. Mit Lemma 3.2 ist die Aussage bewiesen. \square

Lemma 3.4. *Sei X ein CW-Komplex mit n -Gerüst $X^{(n)}$ und $(n - 1)$ -Gerüst $X^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$H_p^{\text{sing}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \begin{cases} \bigoplus_{\{e^n | e^n \text{ ist } n\text{-Zelle}\}} \mathbb{Z}e^n & \text{für } p = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $H_p^{\text{sing}}(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ die freie abelsche Gruppe über alle n -Zellen.

BEWEIS. Der Raum $X^{(n)}$ entsteht aus $X^{(n-1)}$ durch Adjunktion von n -Zellen \mathbb{D}_n über deren Rand \mathbb{S}^{n-1} . Werden endlich viele Zellen hinzugefügt, so gehe induktiv vor. D.h.: Die lange exakte Sequenz des Paares $(X^{(n-1)} \cup_f \mathbb{D}^n, X^{(n-1)})$ zerfällt mit Lemma 3.4 und liefert

$$H_n^{\text{sing}}(X^{(n-1)} \cup_f \mathbb{D}^n) = H_n^{\text{sing}}(X^{(n-1)}) \oplus \mathbb{Z}$$

Für unendliche CW-Komplexe setze man $X_I := X^{(n-1)} \cup_{f_{i_1}} \mathbb{D}^n \cup_{f_{i_2}} \cdots \cup_{f_{i_k}} \mathbb{D}^n$ für $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ und beobachte, daß die Menge $\{X_I \mid I \subseteq \mathbb{N}, I \text{ endlich}\}$ mittels Inklusion ein gerichtetes System ist. (Denn es gilt: $X_I, X_J \subseteq X_{I \cup J}$.) Der direkte Limes über dieses System ist das gesamte n -Gerüst und da Homologie mit direkten Limites vertauscht, folgt:

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) &= H_n^{\text{sing}}(\varinjlim_I X_I, X^{(n-1)}) = \varinjlim_I H_n^{\text{sing}}(X_I, X^{(n-1)}) \\ &= \varinjlim_I \mathbb{Z}^{\oplus |I|} = \bigoplus_{\{e^n \mid e^n \text{ ist } n\text{-Zelle}\}} \mathbb{Z} e^n \end{aligned}$$

□

Definition 3.5. Wir definieren die n -te zelluläre Kettengruppe als

$$C_n(X) = H_n^{\text{sing}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}).$$

(Für $n < 0$ sei dabei $X^{(n)} = \emptyset$ angenommen.) $C_n(X)$ ist also frei über alle n -Zellen.

Wir machen die Menge der $C_n(X)$ zu einem Kettenkomplex, indem wir ein Differential $\tilde{\partial}$ als die Verkettung

$$C_n(X) \cong H_n^{\text{sing}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing}}(X^{(n-1)}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^{\text{sing}}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \cong C_{n-1}(X)$$

eingeführen. Man beobachte, daß wirklich $\tilde{\partial}^2 = 0$ gilt, da in der Definition $\partial_*(c) = [j^{-1} \circ \partial \circ i^{-1}(c)]$ (mit $i_* : H_*^{\text{sing}}(X^{(n)}) \rightarrow H_*^{\text{sing}}(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ und $j_* : H_*^{\text{sing}}(X^{(n-1)}) \rightarrow H_*^{\text{sing}}(X^{(n)})$) das ursprüngliche Differential ∂ des Kettenkomplexes über $X^{(n)}$ vorkommt.

Definition 3.6. Die Homologie des Kettenkomplexes $(C_*(X), \tilde{\partial})$

$$H_*^{\text{cell}}(X) = H((C_*(X), \tilde{\partial}))$$

heißt die zelluläre bzw. CW-Homologie des CW-Komplexes X .

Satz 3.7 (CW-Homologie Theorem). Für einen CW-Komplex X gilt:

$$H_*^{\text{sing}}(X) = H_*^{\text{cell}}(X)$$

Diese Gleichheit ist Konsequenz einer Äquivalenz von Funktoren H_*^{sing} und H_*^{cell} .

Man beobachte, daß man gleiche Überlegungen für Paare topologischer Räume anstellen kann und dann eine Homologietheorie im axiomatischen Sinne erhält. Anstatt eines Beweises folgen nun zuerst einfache Beispiele, nach einer Einführung der Fundamentalgruppe dann auch allgemeinere.

Beispiel 3.8. • Der Ein-Punkt-Raum hat genau eine Nullzelle. Also gilt $(C_*(\{x\}), \tilde{\partial}) = (\mathbb{Z}x, 0)$ und $H_*^{\text{cell}}(\{x\}) = \mathbb{Z}x$. Für die disjunkte Vereinigung $X = \coprod_{x \in I} \{x\}$ folgt analog $H_*^{\text{cell}}(X) = \bigoplus_{x \in I} \mathbb{Z}x$.

- Die n -Sphäre \mathbb{S}^n mit $(n \geq 2)$ trägt bekanntermaßen verschiedene CW-Strukturen. Wir wählen diejenige mit genau einer 0-Zelle und genau einer n -Zelle. Damit sind also die einzigen nicht trivialen zellulären Kettengruppen $C_0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ und $C_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$. Das Differential $\tilde{\partial} : C_i(\mathbb{S}^n) \rightarrow C_{i-1}(\mathbb{S}^n)$ verschwindet wieder, da für alle $i \in \mathbb{Z}$ entweder $C_i(\mathbb{S}^n)$ oder $C_{i-1}(\mathbb{S}^n)$ trivial ist. Also folgt

$$H_i^{\text{cell}}(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } i \in \{0, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man sei sich jedoch darüber im klaren, daß diese Beispiele praktisch von wenig Belang sind, da wir genau diese Ergebnisse – für singuläre Homologie – zur Konstruktion der CW-Homologie verwendet haben. Jetzt somit das erste „neue“ Beispiel.

- Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ aller eindimensionalen komplexen Unterräume des \mathbb{C}^n hat jeweils genau eine Zelle in geradem Grad kleiner gleich $2n$ und sonst keine weitere. Mit den gleichen Argumenten wie oben folgt also

$$H_i^{\text{cell}}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } 2|i \wedge 0 \leq i \leq 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4 Homotopiegruppen

Wir führen im folgenden Homotopiegruppen auf die einfachst mögliche Art und Weise ein. Man beobachte zuerst, daß Homotopien sich recht einfach verknüpfen lassen. Seien $f, g, h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ stetig und F, G Homotopien relativ A mit $F_0 = f, F_1 = g = G_0, G_1 = h$, so ist auch

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y \quad (x, t) \mapsto \begin{cases} F(x, 2t) & \text{für } t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{für } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Homotopie relativ A mit $H_0 = F_0 = f$ und $H_1 = G_1 = h$. (Wohldefiniertheit ist klar und Stetigkeit folgt daraus, daß $X \times [0, 1] = X \times [0, \frac{1}{2}] \cup X \times [\frac{1}{2}, 1]$ in abgeschlossene Unterräume zerlegt werden kann, auf denen H stetig ist.) Schreibe $H = F * G$.

Für Paare (X, A) und (Y, B) topologischer Räume bezeichne $[Y, B; X, A]$ die Menge aller Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $(Y, B) \rightarrow (X, A)$ (d.h. Abbildungen $Y \rightarrow X$ mit $B \rightarrow A$). Im Spezialfall $Y = I^n$ (der abgeschlossene n -Kubus), $B = \partial I^n$ (sein Rand) und $A = *$ (ein Punkt) erhält man die Menge $[I^n, \partial I^n; X, *] = [I^{n-1} \times I, \partial I^n; X, *]$. Diese Menge läßt sich also auffassen als die Menge von Homotopieklassen aller Homotopien zwischen konstanten Abbildungen relativ ∂I^{n-1} von I^{n-1} nach X . Also lassen sich diese Homotopien wie beschrieben verknüpfen. Diese Verknüpfung ist assoziativ und macht $[I^n, \partial I^n; X, *]$ zu einer Gruppe. Neutrales Element ist $[c_*] : I^n \rightarrow$

X , wobei c_* die konstante Abbildung auf den Basispunkt $*$ von X ist. Zu einer gegebenen Homotopie $H : Y \times I \rightarrow X$ existiert eine Homotopie $H^{-1} : Y \times I \rightarrow X$ mit $H^{-1}(y, t) = H(y, 1 - t)$ und $[H * H^{-1}] = [H^{-1} * H] = [c_*]$.

In der Homotopietheorie bewegt man sich in der *gepunkteten Kategorie*, d.h. man zeichnet in den topologischen Räumen einen Basispunkt aus und betrachtet nur solche stetigen Abbildungen als Morphismen, die Basispunkte auf eben solche abbilden. Wir wollen nun obige Konstruktionen in diese gepunktete Kategorie übertragen. Dazu beobachtet man, daß man auf natürliche Art und Weise mittels

$$[I^n, \partial I^n; X, *] = [\mathbb{S}^n, *; X, *]$$

Abbildungen des Kubus, die über dessen Rand faktorisieren als Abbildungen der Sphäre betrachten kann, die Basispunkte erhalten. Im Kontext der gepunkteten Kategorie können wir nun folgende entscheidende Definition machen.

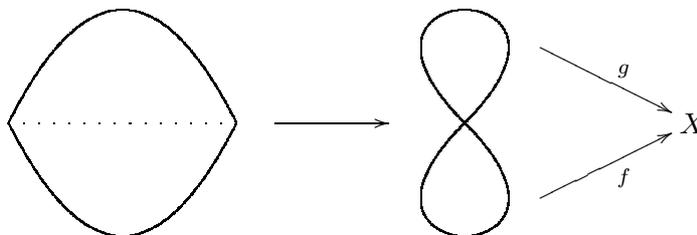
Definition 4.1. Sei $n \geq 1$. Die Gruppe

$$\pi_n(X) = [\mathbb{S}^n, X]$$

mit der durch $*$ induzierten Multiplikation heißt die n -te Homotopiegruppe von X .

Man mache sich klar, daß die Gruppe unabhängig ist von der Wahl des Basispunktes (aus der gleichen Wegkomponente) ist, was die Schreibweise mit unterdrückten Basispunkten rechtfertigt. Die Definition macht klar, daß es darum geht, n -dimensionale „Löcher“ eines Raumes zu vermessen.

Man beachte, daß die Multiplikation von Homotopieklassen eine recht einfache geometrische Interpretation zuläßt: In der Tat entsteht das Produkt zweier Abbildungen durch Komposition derjenigen Abbildung, die den Äquator einer n -Sphäre kontrahiert mit der Abbildung $f \vee g$ auf der so entstehenden Einpunktvereinigung von n -Sphären.



Die Menge $\pi_0(X, x_0)$ trägt in der Regel keine Gruppenstruktur. $\pi_0(Y, y_0)$ besteht aus allen Homotopieklassen von Abbildungen eines zweielementigen diskreten Raumes $\mathbb{S}_0 = \{y_0, y\}$ nach X , wobei y_0 auf x_0 abgebildet wird. Das bedeutet, zwei solche Abbildungen f, g sind genau dann in der gleichen Homotopieklasse, wenn es eine Homotopie H gibt mit $H_0(x) = f(x)$ und $H_1(x) = g(x)$, wenn also $H|_x : \{x\} \times I \rightarrow Y$ ein Weg zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ist. Somit identifizieren sich die Elemente von $\pi_0(Y, y_0)$ mit den Wegkomponenten von Y . Insbesondere hat jeder wegzusammenhängende Raum triviales π_0 .

Die Konstruktion ist funktoriell, d.h.: Zu einer stetigen punktierten Abbildung $f : X \rightarrow Y$ betrachten wir die Abbildung $\pi_*(f) : \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(Y)$, die durch Komposition

$[w] \mapsto [f \circ w]$ induziert wird. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da mit einer Homotopie H zweier Abbildungen nach X auch $f \circ H$ eine Homotopie der induzierten Bilder ist. Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \pi_*(f)([v][w]) &= \pi_*(f)([v * w]) = [f \circ (v * w)] = [(f \circ v) * (f \circ w)] \\ &= [f \circ v][f \circ w] = \pi_*(f)([v])\pi_*(f)([w]) \end{aligned}$$

und somit einen Gruppenhomomorphismus $\pi_*(f)$. Außerdem folgt $\pi_*(g \circ f) = \pi_*(g)\pi_*(f)$ mit einer weiteren stetigen Abbildung $g : Y \rightarrow Z$. Genauso gilt: $\pi_*(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_*(X)}$. Diese Eigenschaften lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: π_* ist ein kovarianter Funktor der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen.

Man beobachte, daß die Homotopiegruppen für $n \geq 2$ abelsch sind. Formal läßt sich das mittels der Adjungiertheit der Suspension und der Schleifenraumbildung verbunden mit der Tatsache, daß ein Schleifenraum eine H-Gruppe ist, also abelsche Fundamentalgruppe besitzt, beweisen. Anschaulich folgt es aus den folgenden Überlegungen: Im Produkt zweier Elemente f, g sitzt f in der unteren Hälfte des Würfels, g in der oberen. Verbreitert man die Ränder, so entsteht Platz, die so verkleinerten Würfel, auf denen f und g nun existieren, umeinander herumzubewegen, also – nach einer Randverkleinerung – die Rollen von f und g getauscht zu haben.

Relative Homotopiegruppen ($n \geq 2$) definieren sich für ein Paar (X, A) als

$$\pi_n(X, A) = [\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}, X, A]$$

mit analog definierter Gruppenstruktur.

Da dieser Spezialfall durchaus gesonderte Bedeutung erhält, erläutern wir kurz als Veranschaulichung die Gruppenstruktur von π_1 , der ersten Homotopiegruppe oder auch *Fundamentalgruppe*. Es gilt also $\pi_1(Y, y_0) = [\mathbb{S}_1, *, Y, y_0] = \{[w] : I \rightarrow Y \mid w(0) = w(1) = y_0\}$. Die Multiplikation entsteht durch „Aneinanderhängen“ $*$ von Wegen:

$$(1) \quad v * w : [0, 1] \rightarrow X \quad t \mapsto \begin{cases} v(2t) & \text{für } t \leq \frac{1}{2} \\ w(2t - 1) & \text{für } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Das Inverse ist gegeben durch den rückwärts durchlaufenen Weg: $[w]^{-1} = [\tilde{w}]$ mit $\tilde{w}(t) = w(1 - t)$.

5 Homologie spezieller Räume

Ein geometrisch recht einleuchtendes Ergebnis der Homotopietheorie ist $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ und die Identität erzeugt die Gruppe. Die erste Homologiegruppe ist die abelianisierte Fundamentalgruppe, also $H_1^{\text{sing}}(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, und diese Abhängigkeit ist funktoriell. Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ induziert einen Homomorphismus $f_n : H_n^{\text{sing}}(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \rightarrow H_n^{\text{sing}}(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$. Der Grad von f ist die Zahl $\text{deg}(f_n) \in \mathbb{Z}$, so daß $f_n(x) = \text{deg}(f) \cdot x$ gilt für alle $x \in H_n^{\text{sing}}(\mathbb{S}^n)$ (aufgefaßt als abelsche Gruppe \mathbb{Z}). Wir zitieren das folgende Ergebnis zur Berechnung des Differentials \tilde{d} im zellulären Komplex $C_n(X)$.

Satz 5.1. Das Differential $\tilde{\partial} : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)$ ist (auf Erzeugern) gegeben durch

$$\tilde{\partial}\sigma = \sum_{\tau \text{ n-Zelle}} \deg(p_\tau f_{\partial\sigma})\tau.$$

Dabei ist $f_{\partial\sigma}$ die Verklebeabbildung der $(n+1)$ -Zelle σ über ihren Rand und p_τ ist die „Projektion“ $X^{(n)} \rightarrow X^{(n)}/X^{(n-1)} = \bigvee \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, die τ über seinen Rand zur Sphäre verklebt und alle anderen n -Zellen auf den Basispunkt abbildet.

Man rechnet nun nach, daß z.B. im Falle genau eines 0-Simplexes, das Differential $\tilde{\partial} : C_1(X) \rightarrow C_0(X)$ verschwindet. Damit können wir nun die folgenden etwas weniger trivialen Beispiele rechnen.

Beispiel 5.2. • Der Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ hat eine CW-Struktur mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen a, b und einer 2-Zelle σ . Verklebung findet gemäß der Identifikation der gegenüberliegenden Seiten (a, b) eines Quadrates statt. Also haben wir $C_0(T) = \mathbb{Z}$, $C_1(T) = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$, $C_2(T) = \mathbb{Z}\sigma$. Das 1-Gerüst besteht aus einer „Acht“ und die Verklebungsabbildung von σ hängt deren Rand ein entlang des Pfades a, b, a^{-1}, b^{-1} . Die Abbildung $p_a f_{\partial\sigma}$ ist also gerade die Abbildung, die den b -Anteil auf dem Basispunkt beläßt, also die Schlinge $a * \text{const} * a^{-1} * \text{const} \simeq \text{const}$. Damit hat diese Schlinge Grad 0. Die gleichen Argumente zeigen, daß auch $p_b f_{\partial\sigma}$ Grad 0 hat und die Abbildung $\tilde{\partial} : C_2(T) \rightarrow C_1(T)$ ist damit trivial. Also erhalten wir: $H_0^{\text{cell}}(T) = \mathbb{Z} = H_2^{\text{cell}}(T)$ und $H_1^{\text{cell}}(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und alle anderen Gruppen verschwinden.

- Wir betrachten eine alternative CW-Struktur auf der 2-Sphäre \mathbb{S}^2 gegeben durch eine 0-Zelle, eine 1-Zelle a (als Äquator) und zwei 2-Zellen σ_1, σ_2 (als Hemisphären). Damit erhalten wir wieder nur die folgenden nicht-trivialen Kettengruppen: $C_0(\mathbb{S}^2) = C_1(\mathbb{S}^2) = 1$ und $C_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Die Verklebungsabbildung einer 2-Zelle ist schlicht (bis auf Orientierung) die Identität auf \mathbb{S}^1 . Sie repräsentiert damit also einen Erzeuger der Fundamentalgruppe von \mathbb{S}^1 , bzw. ist $\pm \text{id} : \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ und damit auch bis auf Orientierung die Identität auf $H_1^{\text{sing}}(\mathbb{S}^1)$. Damit gilt also $\deg(p_a f_{\partial\sigma_i}) = 1$ für $i = 1, 2$ und $\text{im } \tilde{\partial}_2 = \mathbb{Z}$. Somit erhalten wir $H_0^{\text{cell}}(\mathbb{S}^2) = H_2^{\text{cell}}(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ und alle anderen Gruppen verschwinden.
- Als letztes Beispiel nun eines, bei dem das Differential einmal nicht komplett verschwindet oder surjektiv ist. Die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ entsteht aus einer Kreisscheibe durch punktsymmetrisches Identifizieren des Randes. Sie besteht also aus einer 0-Zelle, einer 1-Zelle a und einer 2-Zelle σ , die so mit a verklebt wird, daß ihr Rand zweimal a durchläuft. Formaler, aufgefaßt als eingebettet in \mathbb{C} , ist die Abbildung damit schlicht $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $z \rightarrow z^2$. Anschaulich ist klar, daß diese Abbildung auf Fundamentalgruppen genau die Abbildung $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, $x \rightarrow 2x$ und damit auch die gleiche Abbildung auf ersten Homologiegruppen induziert. Also ist die Abbildung gerade Multiplikation mit ± 2 und wir erhalten: $\deg(p_a f_{\partial\sigma}) = \pm 2$ bzw. $\tilde{\partial} = \cdot(\pm 2)$. Die Homologiegruppen ergeben sich daher als: $H_0^{\text{cell}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}$, $H_1^{\text{cell}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/\pm 2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ und $H_2^{\text{cell}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = \ker(\cdot 2) = 0$.