Antrittsvorlesung
Nichtstandard Methoden in der Mathematik

Christian Serpé

19. Januar 2011

Infinitesimalrechnung

Abbildung: Leibniz (1646-1716)

Abbildung: Robinson (1918-1974)

Vervollständigung von Strukturen

Beispiele:

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$ sind nicht algebraisch abgeschlossen
   $\rightsquigarrow \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{F}_p}$ algebraischen Abschluss
   - algebraisch abgeschlossen und signifikant grösser
2. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig als metrischer Raum
   $\rightsquigarrow \mathbb{R}$ Vervollständigung von $\mathbb{Q}$
   - vollständiger metrischer Raum und signifikant grösser

Beispiel

3. ZFC ist logisch unvollständig
   $\rightsquigarrow \overline{ZFC} = Th(\mathcal{M})$ logische Vervollständigung.
   - logisch vollständig, signifikant größer
   - nicht eindeutig
4. $\mathbb{R}$ elementar unvollständig/nicht abzählbar saturiert
   i.e. ex. abzählbares Teilmengensystem wie zum Beispiel
   $\{(0, \frac{1}{n}] | n \in \mathbb{N}\}$ mit
   - endliche Schnitte sind nicht leer
   - der gesamte Schnitt ist aber leer

   $\rightsquigarrow {}^*\mathbb{R}$ Nichtstandar-Erweiterung von $\mathbb{R}$
   - abzählbar saturiert und signifikant grösser
   - nicht eindeutig

Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ (Robinson)

$$ {}^*\mathbb{R} = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R} / \sim $$

Definition (Filter)

Ein System $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heisst Filter (über $\mathbb{N}$), falls gilt:

- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset \mathbb{N} \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Beispiel (Filter der koendlichen Mengen)

$$ \mathcal{F}_{koendl} := \{ A \subset \mathbb{N} | \mathbb{N} - A \text{ endlich } \} $$

Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$

Ein Filter definiert eine Äquivalenzrelation auf $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$:

$$(a_i) \sim_{\mathcal{F}} (b_i) :\Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} | a_i = b_i\} \in \mathcal{F}$$

Definition (Ultrafilter)

Ein Filter $\mathcal{U}$ heisst *Ultrafilter*, falls $\mathcal{U}$ nicht echt in einem größeren Filter enthalten ist.

Aus dem Lemma von Zorn folgt:

Zu jedem Filter $\mathcal{F}$ gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.

Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$

$\mathcal{U}$ fest gewählter Ultrafilter mit $\mathcal{F}_{koendl} \subset \mathcal{U}$

Definition

$$ {}^*\mathbb{R} := \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R} / \sim_{\mathcal{U}} $$

Theorem

${}^*\mathbb{R}$ ist ein total geordneter Körper wobei die Ordnung durch

$$ (a_i) < (b_i) :\Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} | a_i < b_i\} \in \mathcal{U} $$

gegeben ist. $\mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ist ein ordnungserhaltener Körperhomomorphismus.

Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$

Beispiel

Die Folge $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ definiert ein infinitesimales Element ϵ in ${}^*\mathbb{R}$, d.h.:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \epsilon < \frac{1}{n}$$

Die Folge $(1, 2, 3, \dots)$ definiert ein unendlich grosses Element $h \in {}^*\mathbb{R}$, d.h.:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n < h$$

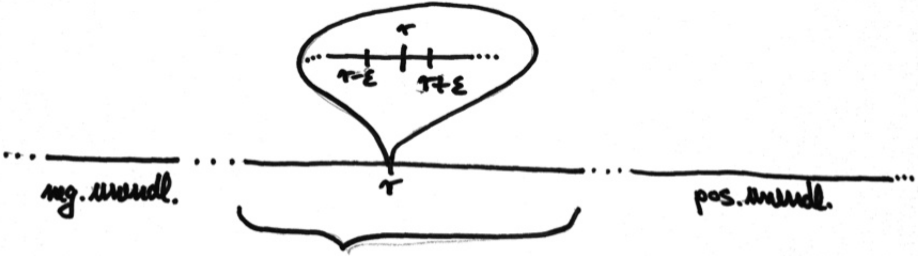
Theorem

${}^*\mathbb{R}$ ist abzählbar saturiert und $\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ ist eine elementare Erweiterung.

Monade

Monade um r

$$m(r)=\{x\in {}^*\mathbb{R} \mid |x-r| \text{ infinitesimal}\}$$



$$ {}^*\mathbb{R}^{fin} := \{x\in {}^*\mathbb{R} \mid \exists n\in \mathbb{N} \cdot |x|<n\}$$

Standardteilabbildung

$$^*\mathbb{R}^{fin} := \{x \in {}^*\mathbb{R} | \exists n \in \mathbb{N} : |x| < n\} \subset {}^*\mathbb{R} \text{ Teilring}$$

$$st : {}^*\mathbb{R}^{fin} \to \mathbb{R}.$$

- st ist surjektiver Ringhomomorphismus
- $ker(st) = m(0) := \{x \in {}^*\mathbb{R} | x \text{ ist infinitesimal}\}$.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Beispiel

- $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x \in (a, b)$ falls für alle $dx \in m(0)$ gilt: $f(x) - {}^*f(x + dx) \in m(0)$
- $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $dx \in m(0)$ infinitesimal. Dann gilt:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = st(\frac{{}^*f(x + dx) - {}^*f(x)}{dx})$$

* höherer Stufe

$$\begin{array}{cccccc}
* & : & \mathbb{R} & \to & {}^*\mathbb{R} \\
* & : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}({}^*\mathbb{R}) \\
 & & U \subset \mathbb{R} & \mapsto & {}^*U \subset {}^*\mathbb{R} \\
* & : & \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) & \to & \mathcal{P}(\mathcal{P}({}^*\mathbb{R})) \\
 & & A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \mapsto & {}^*A \subset \mathcal{P}({}^*\mathbb{R})
\end{array}$$

Definition (interne Teilmengen von $^*\mathbb{R}$)

Es gilt $^*(\mathcal{P}(\mathbb{R})) \subsetneq \mathcal{P}({}^*\mathbb{R})$ und Elemente in $^*(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ heissen *interne* Teilmengen von $^*\mathbb{R}$.

Definition (*Endliche Mengen)

Elemente in $^*\{F \subset \mathbb{R} | F \text{ endl.}\}$ heissen **endliche* Teilmengen.

Theorem

Es gilt ein höher stufiges Transferprinzip.

Hyperdiskretisierung

Korollar

Die *endlichen Teilmengen von $^*\mathbb{R}$ sind so “gut” wie die endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Beispiel (Hyperdiskretisierung)

$a, b \in \mathbb{R}, [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N},$ i.e. h ist unendlich gross

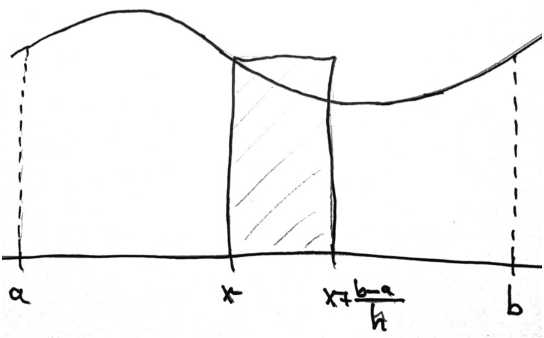
$$\{a + i \cdot \frac{b-a}{h} | i = 0, 1, 2, \ldots, h\} \subset {}^*\mathbb{R} \text{ ist *endlich.}$$

Integration

Beispiel

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

$st({}^*\sum_{i=0}^{h-1} {}^*f(a + i \cdot \frac{b-a}{h}) \cdot \frac{b-a}{h}) = \int_a^b f(x)dx$



Weitere Anwendungsfelder

- Distributionen
- Funktionalanalysis
- Topologie
- Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
- Algebra und Zahlentheorie
- ...

Bemerkung

Vorurteile gegenüber Nichtstandard Methoden.

Hyperganzen Zahlen ${}^*\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow {}^*\mathbb{Z}$$

Gilt:

- ${}^*\mathbb{Z}$ kommutativer Ring mit 1, aber nicht noethersch.
- interne Ideale in ${}^*\mathbb{Z}$ sind Hauptideale

Beispiele:

- ist $P \in {}^*\mathbb{Z}$ eine unendlich grosse Primzahl, so ist ${}^*\mathbb{Z}/P$ ein *endlicher Körper der Charkteristik 0.
- Durch $(l^\infty) := \{x \in {}^*\mathbb{Z} | \forall n \in \mathbb{N} : l^n | x\} \subset {}^*\mathbb{Z}$ wird ein (externes) Ideal in ${}^*\mathbb{Z}$ definiert und es gilt ${}^*\mathbb{Z}/(l^\infty) \simeq \mathbb{Z}_l$.

Weil Kohomologie Theorie

Definition

Eine Weil Kohomologietheorie ist ein Funktor

$$H^* : (SmProjVar/k)^{op} \to \text{ grad. K-Vek.-Räume}$$

mit $char(K) = 0$ und:

- $H^i(X)$ endl. dimensional
- Poincaré Dualität
- Künneth Formel
- ...

Étale Kohomologie (Grothendieck et al.)

X Varietät über k
$Shv_{et}(X, \mathbb{Z}/n)$:= Kat. der $\mathbb{Z}/n$ Garben auf dem ét. Situs von X.

$$\Gamma(X, \cdot) : Shv_{et}(X, \mathbb{Z}/n) \to Ab$$

$$H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/n) := R^i\Gamma(X, \mathbb{Z}/n)$$

Die so entstehenden Kohomologietheorien haben gute Eigenschaften, allerdings nur mit endlichen Koeffizienten.

Definition (l-adische Kohomolgoie)

$$H^i_{et}(X, \mathbb{Q}_l) := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/l^n) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

Nichtstandard étale Kohomologie (Tomašić, Brünjes-S.)

$$\{Shv_{et}(X, \mathbb{Z}/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Anwendung der Nichtstandard Konstruktionen ergibt:

$$\{{}^*Shv_{et}(X, {}^*\mathbb{Z}/n)\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$$

Definition

Es sei $P \in {}^*\mathbb{N}$ eine unendlich grosse Primzahl.

$${}^*H^i_{et}(X, {}^*\mathbb{Z}/P) := R^{i\,*}\Gamma(X, {}^*\mathbb{Z}/P)$$

Nichstandard étale Kohomologie

Theorem

Durch ${}^*H^i_{et}(\cdot, {}^*\mathbb{Z}/P)$ *wird eine Weil Kohomologietheorie definiert.*

Um zu zeigen, dass ${}^*H^i_{et}(\cdot, {}^*\mathbb{Z}/P)$ endlich dimensional, ist muss man folgendes zeigen:

Theorem

$(dim_{\mathbb{Z}/l} H^i_{et}(X, \mathbb{Z}/l))_{l \in \mathbb{P}}$ *ist beschränkt.*

Dies folgt aus einem tiefliegenden Resultat von Gabber über Torsion in der l-adischen Kohomologie.

Bemerkungen

- ${}^*H^i_{et}(\cdot, {}^*\mathbb{Z}/P)$ ist ein abgeleiteter Funktor
- Hochschild Serre Spektralsequenz
- Die Aussage, dass ${}^*H^i_{et}(\cdot, {}^*\mathbb{Z}/P)$ eine Weil Kohomologietheorie definiert, ist ein tiefliegendes Resultat.

Theorem (Vergleich mit l-adischer Kohomologie)

In "guten Fällen" gilt für $h \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$:

$$ {}^*H^i_{et}(X, {}^*\mathbb{Z}/l^h) \otimes_{{}^*\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \simeq H^i_{et}(X, \mathbb{Z}_l) $$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit