Prinzipielles Nichtwissen in der Mathematik

Ralf Schindler [*†]

14. Dezember 2025

Dem Andenken an Wolfram Pohlers gewidmet.

> Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avoient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connoissance des hommes s'entresuivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre.
>
> René Descartes, *Discours de la méthode*, partie II.

Gibt es prinzipielles Nichtwissen in der Mathematik? Gibt es mathematische Aussagen, von denen wir niemals wissen werden, ob diese wahr sind oder falsch?

Wenn wir diese Frage sinnvoll erörtern wollen, müssen wir voraussetzen, daß es überhaupt so etwas gibt wie mathematisches Wissen, daß es

[*]Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung, Universität Münster, F.R.G., rds@uni-muenster.de. Der Autor dankt Ben De Bondt für das Auffinden und seine Hilfe bei der Übersetzung des Zitats von R. Descartes: Diese langen Ketten von Gründen, ganz einfach und leicht, derer sich Geometer gewöhnlich bedienen, um zu ihren schwierigsten Beweisen zu gelangen, gaben mir Anlass zu der Vorstellung, dass alle Dinge, die in den Bereich des Wissens der Menschen fallen können, auf dieselbe Weise gefolgert werden können, wenn man nur darauf verzichtet, etwas als wahr anzunehmen, was nicht wahr ist, und immer die richtige Reihenfolge einhält, um sie voneinander abzuleiten, und daß es dann keine so weit entfernten Dinge gibt, daß man diese nicht schließlich erreichen könnte, und keine so verborgenen, dass man sie nicht entdecken könnte.

[†]Funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) under Germany's Excellence Strategy EXC 2044 390685587, Mathematics Münster: Dynamics - Geometry - Structure.

mathematische Aussagen gibt, die einen Wahrheitswert besitzen, etwa weil diese Aussagen sich auf einen existierenden Gegenstandsbereich beziehen und wir epistemischen Zugang zu ihm haben. Diese Annahmen werden seit der Antike und bis zum heutigen Tage diskutiert, wir wollen sie hier nicht hinterfragen.

Unsere vorliegende Fragestellung können wir dann wie folgt präzisieren. Entweder wir können fragen,

(1) ob es eine einzelne mathematische Aussage gibt, von der wir niemals wissen werden, ob sie wahr ist oder falsch,

oder, was etwas schwächer ist,

(2) ob es jederzeit mathematische Aussagen geben wird - unabhängig davon, wie fortgeschritten unser mathematisches Wissen ist - von denen wir nicht wissen werden, ob diese wahr sind oder falsch.

Offensichtlich folgt (2) aus (1), und es sollte klar sein, daß die Umkehrung nicht gilt.

Der einfachste Typ mathematischer Aussagen ist der der *arithmetischen* Aussagen, wie beispielsweise $7 + 5 = 12$. Manche Philosophen sehen in derartigen Aussagen den allgemeinen Typ mathematischer Aussagen.[1] Dies ist allerdings Unsinn, da die Mathematik sich fast ausschließlich jenseits der Arithmetik abspielt. Entsprechend ist es auch ein naiver Irrtum anzunehmen, in der Mathematik werde hauptsächlich gerechnet.

Aussagen komplizierteren als arithmetischen Typs sind allgemeine *zahlentheoretische* Aussagen über natürliche Zahlen, Aussagen über reelle Zahlen oder über Mengen reeller Zahlen, Aussagen über Vektorräume, topologische Räume, algebraische Strukturen und so weiter. Beispiele hierfür sind: (a) die Goldbachsche Vermutung, wonach jede gerade natürliche Zahl ≥ 4 als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann, (b) e^π ist transzendent (hier ist e die Eulersche Zahl, π die Kreiszahl), (c) es gibt eine nicht-Lebesgue-meßbare Menge, die die Projektion einer koanalytischen Menge ist, (d) jeder Vektorraum besitzt eine Basis, etc.

Die Antwort auf (a) ist seit ihrer Formulierung am 07.06.1742 nicht bekannt, (b) wurde 1929 von A. Gelfond gezeigt, der Satz von Gelfond-Schneider von 1934 liefert sogar eine Lösung des siebten Hilbertschen Problems,[2] Verständnis für (c) konnte erst mit M. Suslin und der Entwicklung

[1] $7 + 5 = 12$ wird ausführlich diskutiert in [8, Einleitung der zweiten Ausgabe, V 1.].

[2] Hilbert stellte im Rahmen seiner Rede auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris im Jahre 1900 eine berühmt gewordene Liste von 23 damals offenen mathematischen Problemen zusammen, siehe [5].

der Deskriptiven Mengenlehre entwickelt werden.[3] (d) ist abstrakt: A. Blass zeigte 1984, daß diese Aussage zum Auswahlaxiom äquivalent ist.[4]

Es hat sich herausgestellt, dass alle mathematischen Aussagen in mengentheoretische Aussagen übersetzt werden können, so dass es unserer Sache hier keinen Abbruch tut, wenn wir mathematische Wahrheit mit mengentheoretischer Wahrheit gleichsetzen.

Seit Euklid von Alexandria (ca. 3. Jhdt. v.u.Z.) war es unhinterfragter Standard in der Mathematik zu sagen, daß wir dadurch von einer mathematischen Wahrheit wissen, daß wir die entsprechende Aussage logisch aus einem evidenten bzw. intuitiv gültigen Axiomensystem ableiten. Diese Idee spricht auch aus dem Descartes-Zitat, das dieser Arbeit vorangestellt ist. Nun hat aber Kurt Gödel bewiesen, daß sie grundlegend fehlerhaft ist.

Gödel zeigte, daß selbst die Menge der zahlentheoretischen Wahrheiten nicht rekursiv aufzählbar ist. Dies bedeutet, daß es kein Axiomensystem T geben kann, welches

(i) mit Hilfe einer (endlichen) Vorschrift aufgelistet werden kann,

(ii) welches konsistent ist, und

(iii) welches genau alle zahlentheoretischen Wahrheiten als logische Folgerungen besitzt.[5]

Dieses bahnbrechende Resultat von K. Gödel aus dem Jahre 1931 ergibt sich aus dem *Ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz*. Er gehört zum Standard-Repertoire jeder Vorlesung zur mathematischen Logik in gleicher Weise wie etwa die Galois-Theorie zur Algebra gehört.[6]

Während Gödels Satz allgemeine zahlentheoretische Aussagen betrifft, gibt es ein Axiomensystem mit den obigen Eigenschaften (i), (ii) und (iii), wobei in (iii) aber "zahlentheoretisch" durch "arithmetisch" ersetzt wird, sehr wohl. Es wird oft mit Q bezeichnet ([10, S. 24f.] oder [13, IV, 18]). Q ist ein schwaches Teilsystem der Peano-Arithmetik, PA. Sei φ eine Aussage der Gestalt "es gibt eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $\psi(n)$", wobei ψ keine unbeschränkten Quantoren enthält[7]; dann beweist Q die Aussage φ genau dann wenn φ wahr ist. Alle arithmetischen Aussagen sind von dieser (bzw. sogar einfacherer) Gestalt.

[3] Eine atemberaubende Geschichte. Siehe [7].

[4] Siehe [3].

[5] Aus (iii) folgt (ii).

[6] Ein Beweis findet sich z.B. in [13, S. 91].

[7] Wir können uns gerne vorstellen, daß dies bedeutet, daß ψ arithmetisch ist.

Auf der anderen Seite kann in der ursprünglichen Formulierung der Konsequenz von Gödels Erstem Unvollständigkeitssatz obiges (iii) abgeschwächt werden zu:

(iii)' T beweist φ für alle zahlentheoretischen Wahrheiten der Gestalt "für alle natürlichen Zahlen n gilt $\psi(n)$", wobei ψ keine unbeschränkten Quantoren enthält.

Die Goldbachsche Vermutung ist eine Aussage von dieser Gestalt. Dadurch verschärft sich die Aussage der Nichtexistenz von T. Dies ist der tiefere (logische) Grund dafür, warum die arithmetischen Aussagen nicht prototypisch für allgemeine zahlentheoretische oder gar noch allgemeinere mathematische Aussagen sind.

Derartige Dinge werden beispielsweise in [10, Kapitel 4] oder in [13, Kapitel IV] diskutiert.

Im Lichte des Ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes hat die schwächere Variante (2) unserer obigen Fragestellung eine beinahe triviale Antwort. Wenn unser zu einem gegebenen Zeitpunkt vorliegendes mathematisches Wissen aus Aussagen besteht, die wir logisch aus einem gegebenen Axiomensystem ableiten, welches die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt, dann wird es immer eine wahre Aussage geben, die wir zu diesem Zeitpunkt nicht wissen.

Wir wollen uns nun der ersten und gehaltvolleren Variante (1) der obigen Fragestellung annähern und zwar zunächst anhand eines Beispiels. Fest steht bereits, daß wir den vom Descartes-Zitat ausgedrückten Optimismus nur dadurch dem Geiste nach "retten" können, indem wir neben Deduktionen (logischen Ableitungen aus evidenten Axiomensystemen) auch andere Arten der Begründung für mathematische Aussagen werden zulassen müssen.

Georg Cantor hatte 1873 entdeckt, daß es mehr reelle Zahlen gibt als natürliche. Genauer gilt: Zu jeder Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$, für das es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = x$ gibt. (Siehe z.B. [10, Satz 2.2.19].) Inspiriert durch dieses Resultat formulierte Cantor sodann seine *Kontinuumshypothese*, welche besagt, daß jede überabzählbare Menge reeller Zahlen gleich groß ist wie das Kontinuum, das heißt wie die gesamte Menge der reellen Zahlen. (Siehe z.B. [10, Abschnitt 3.3].)

Eine präzise Formulierung der Kontinuumshypothese lautet wie folgt.

(CH) Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Menge reeller Zahlen. Dann existiert entweder eine Surjektion $f\colon \mathbb{N} \to A$ oder es existiert eine Surjektion $f\colon A \to \mathbb{R}$.[8]

[8] Eine Abbildung $f\colon A \to B$ von einer Menge A in eine Menge B heißt *surjektiv*, falls für alle $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$.

Das *Kontinuumsproblem* (siehe auch [10, Abschnitt 3.3]), nämlich die Frage, ob die Kontinuumshypothese wahr sei oder falsch, entzog sich nicht nur Cantors Bemühungen. Als Frage blieb sie jahrzehntelang offen.

Durch Leistungen u.a. von E. Zermelo und A. Fraenkel wurde eine Standardaxiomatisierung der Mengenlehre herausgearbeitet, die heute mit ZFC bezeichnet wird. (Siehe z.B. [10, Kapitel 3].)

Es stellte sich später heraus, aufgrund von Arbeiten von Kurt Gödel und Paul Cohen, daß das Kontinuumsproblem insofern unlösbar ist als die Kontinuumshypothese CH *unabhängig* von ZFC ist, d.h. daß ZFC die Kontinuumshypothese weder beweist noch ihre Negation beweist. (Die entsprechenden Sätze von Gödel und Cohen finden sich z.B. in [11, Corollary 5.32, Theorem 6.33].)

Üblicherweise gehen wir davon aus, daß ZFC korrekt ist, d.h. daß jedes Theorem von ZFC eine wahre Aussage ist. Damit ist für $T = ZFC$ die Kontinuumshypothese CH ein konkretes Beispiel dafür, warum ZFC (während (i) und (ii) für ZFC gilt) nicht (iii) erfüllt – mit der Einschränkung, daß CH keine zahlentheoretische Aussage ist sondern eine über Mengen reeller Zahlen.

Seit Gödel und Cohen hat die Mathematik eine Vielzahl natürlicher Aussagen herausgearbeitet, die von ZFC unabhängig sind, beispielsweise auf dem Gebiet der homologischen Algebra, der Theorie der überabzählbaren abelschen Gruppen, der Topologie, der Theorie der C^*-Algebren, etc.

Gleichzeitig erklären die Sätze von Gödel und Cohen, warum die Bemühungen von Cantor und seiner Nachfolger, CH zu entscheiden, keinen Erfolg haben konnten, da deren Argumente so rekonstruiert werden können, daß sie sich alle im Rahmen von ZFC bewegen.

Was tun?

Die Variante (1) unserer zentralen Fragestellung kann wie folgt präzisiert werden.

(1') Gibt es unter den wahren mengentheoretischen Aussagen (welche nicht ZFC-Theoreme sind) Aussagen, von denen wir niemals wissen werden, ob sie wahr sind oder falsch?

Und: Ist beispielsweise die Kontinuumshypothese eine derartige Aussage?

Sicherlich gibt es Aussagen, welche nicht ZFC-Theoreme sind, von denen wir jedoch wissen, daß sie wahr sind. Aufgrund des *Zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes* (der im übrigen auch bereits für PA gilt, siehe z.B. [13, Abschnitt 20]) ist die Aussage, wonach ZFC konsistent sei, unabhängig

von ZFC. Dann können wir aber, wenn wir ZFC glauben, das Nicht-ZFC-Theorem der Konsistenz von ZFC nicht wirklich nicht glauben.

Kurt Gödel hat einen Weg vorgeschlagen, den Descartes'schen Optimismus aufrechtzuerhalten. (Siehe [4].) Sein Gedanke ist, das Argument für "ZFC ist konsistent" auf die Spitze zu treiben und ZFC durch die Hinzunahme von Axiomen zu verstärken, die die Existenz *großer Kardinalzahlen* zum Ausdruck bringen (siehe etwa [11, 4.3]).

Während Gödels Programm für Aussagen über reelle Zahlen durchschlagend erfolgreich war (siehe etwa [11, Chap. 13]), gilt dies nicht für Aussagen über Mengen reeller Zahlen. Dies motivierte W. Hugh Woodin, ein Axiomensystem vorzulegen, daß durch Maximalitätsbetrachtungen begründet wird und welches natürliche Aussagen über Mengen reeller Zahlen entscheidet. Woodins Axiome besitzen die unspektakulären Bezeichnungen $(*)$, $(*)^+$ und $(*)^{++}$ ([12]).

Woodins Ansatz ist unbestritten insofern erfolgreich als gezeigt werden konnte ([2]), daß $(*)$ mit einer andersartigen und unabhängig herausgearbeiteten Verstärkung von ZFC kompatibel ist, nämlich mit Martins Maximum.

ZFC plus $(*)$ impliziert, daß CH falsch ist, genauer gesagt: daß es $\aleph_2$ reelle Zahlen gibt. Eine ausführliche Darstellung dieser Dinge findet sich in [9] und [1].

Wir können wie folgt allgemein beschreiben, was in Bezug auf CH geschah. Es gibt keinen wirklichen Grund anzunehmen, daß ähnliches nicht für beliebige (natürliche) mathematische Aussagen möglich sein sollte, so daß wir davon ausgehen dürfen, daß die anfangs gestellte Frage (1) eine negative Antwort besitzt.

Um eine von ZFC unabhängige Aussage φ zu entscheiden, können wir eine Verstärkung T von ZFC suchen, die folgende Eigenschaften erfüllt.

(α) T beweist oder widerlegt φ.

(β) T ist konsistent mit ZFC plus beliebigen Große-Kardinalzahl-Axiomen.

(γ) T ist begründbar mit Hilfe eines übergeordneten ("philosophischen") Prinzips, das nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit φ steht.

(δ) T hat Konsequenzen, die aus Gründen, die unabhängig von (γ) sind, natürlich und stimmig erscheinen.

Üblicherweise erwartet man, daß (β) mit Hilfe der Methode des Forcings oder der Theorie der inneren Modelle ausgehend von ZFC und großen Kardinalzahlen bewiesen wird.

Bezüglich (γ) läßt sich nicht a priori festlegen, was als gutes übergeordnetes Prinzip gilt. Es ist Teil der Lösung des Problems, ob φ wahr ist oder nicht, zu argumentieren, daß gute Gründe für T vorliegen. Im Falle des oben angesprochenen Axioms $(*)$ von Woodin ist das Prinzip gegeben durch die Idee, das mengentheoretische Universum solle eine gewisse Saturiertheit besitzen.

(δ) läßt sich vielleicht am besten anhand von Projektiver Determiniertheit veranschaulichen. Bezüglich der Uniformisierungseigenschaft projektiver Mengen reeller Zahlen setzt die Annahme der Projektiven Determiniertheit beweisbar fort, was beweisbar in ZFC für einen (kurzen) Anfangsabschnitt der projektiven Mengen gilt.

Manchmal – und das ist einfach eine Variante von (δ) – spricht auch die Tatsache, daß T Prognosen ermöglicht, für T. So ließ sich etwa aus ZFC plus "es gibt eine meßbare Kardinalzahl" analytische Determiniertheit zeigen, bevor bewiesen war, daß Borel-Determiniertheit ein ZFC-Theorem ist. (Beides sind tiefliegende Resultate von D.A. Martin.)

φ kann sicherlich als besser gestützt gelten, wenn φ aus mehreren Theorien T wie oben folgt, deren (γ) nicht deckungsgleich sind. Dies ist beispielsweise aufgrund der Arbeit [2] für "es gibt $\aleph_2$ reelle Zahlen" der Fall.

Eine weitere – jedoch schwierige – Anforderung an eine Verstärkung T von ZFC, die eine gegebene von ZFC unabhängige Aussage entscheidet, ist die folgende.

(ϵ) Für die Theorie T ist ihrerseits eine Verstärkung T^* in Aussicht, die bezüglich "natürlicher" mathematischer Aussagen vollständig ist.

In (ϵ) soll das Wort "natürlich" zum Ausdruck bringen, daß die fraglichen Aussagen in der konkreten Arbeit von Mathematikerinnen und Mathematikern im Rahmen der Entwicklung eines Teilgebiets der Mathematik (und insbesondere unabhängig von meta-mathematischen Konstruktionen) zum Vorschein treten. Die Bedeutung von (ϵ) ist instrinsisch vage. Die gegenwärtige Sicht auf die Dinge ist, daß das oben diskutierte Axiom $(*)$ von W. Hugh Woodin (ϵ) nicht erfüllt; dies mag aber durch zukünftige Forschung widerlegt werden.

David Hilbert beendete seine berühmte Radioansprache im Jahre 1930 [6] mit den optimistischen Worten: "Wir müssen wissen! Wir werden wissen!" Ein Jahr später trat Gödel mit seinen Unvollständigkeitssätzen hervor. Politisch war es der Vorabend von Diktatur, Unterdrückung und den tiefsten Abgründen von Barbarei. Ist uns der Optimismus vergangen?

Soviel ist klar: Es gibt keine Alternative zu dem grundlegenden aufklärerischen Ansatz, der aus Hilberts und auch aus Descartes' Worten spricht.

Literatur

[1] D. Asperó und R. Schindler, *Wieviele reelle Zahlen gibt es?*, in: Mathematische Semesterberichte **70** (2023), S. 1—15.

[2] D. Asperó und R. Schindler, *Martin's Maximum^{++} implies Woodin's Axiom* $(*)$, Annals of Mathematics **193** (3) (2021), S. 793-835.

[3] A. Blass, *Existence of bases implies the axiom of choice*, Contemporary Mathematics 31 (1984), S. 31–33.

[4] K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, in: The American Mathematical Monthly **54**, No. 9 (1947), S. 515-525.

[5] D. Hilbert, *Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900*, in: Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. Heft 3, 1900, S. 253–297.

[6] D. Hilbert, Radioansprache, 1930:
https://www.youtube.com/watch?v=wuLFqgx2Pec

[7] V.I. Igoshin, *A short biography of Mikhail Yakovlevich Suslin*, in: Russian Math. Surveys **51**: 3 (1996), S. 371-383.

[8] I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, F. Meiner Verlag 1956.

[9] R. Schindler, *Wozu brauchen wir große Kardinalzahlen?*, in: Mathematische Semesterberichte **53** (2006), S. 65 - 80.

[10] R. Schindler, *Logische Grundlagen der Mathematik*, Springer-Verlag 2009.

[11] R. Schindler, *Set theory. Exploring independence and truth*, Springer-Verlag 2014.

[12] W.H. Woodin, *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal*, de Gruyter-Verlag 1999.

[13] M. Ziegler, *Mathematische Logik*, Birkhäuser-Verlag 2010.