Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **WS 18/19**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

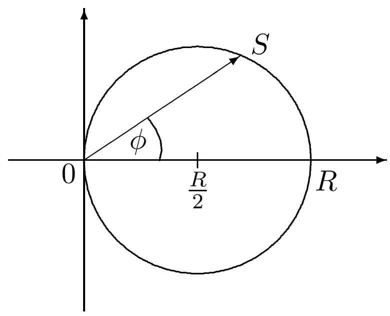
Abgabe: Freitag, 18.1.2019 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 12

Aufgabe 1. Es sei $A := \{(x, y, z) \;:\; (x-R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2\,,\; x^2+y^2+z^2 \leq R^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ der Durchschnitt der Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius R mit dem Zylinder mit Radius $R/2$, dessen Symmetrieachse parallel zur z-Achse durch $(\frac{R}{2}, 0, 0)$ geht.

(a) Berechnen Sie das Volumen von A.

(b) Berechnen Sie für die Dichte $\mu = 1$ die x-Koordinate s_x des Schwerpunkts von A.

Hinweise: Das geht einfacher in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) mit $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$. Überlegen Sie sich die Parametrisierung der Schnittfläche $z = 0$ (siehe Skizze) und integrieren Sie in der Reihenfolge $\int d\phi \int dr \int dz$ über zu bestimmende Intervalle für ϕ, r, z.



Aufgabe 2. Wir betrachten den homogenen Torus

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq \varrho^2\right\}\,, \qquad R > \varrho\,.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des Torus.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $K \subseteq U$ kompakt. Später in der Vorlesung wird bewiesen, daß der *Flächeninhalt* $A(F(K))$ der Fläche $F(K) \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch

$$A(F(K)) = \int_K dx \sqrt{\det(((DF)(x))^t (DF)(x))}\,. \tag{1}$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel und der Parametrisierung

$$F\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}(R - \varrho\cos\psi)\cos\phi\\ (R - \varrho\cos\psi)\sin\phi\\ \varrho\sin\psi\end{pmatrix}$$

den Oberflächeninhalt des Torus.

Aufgabe 3. Sei $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ stetig differenzierbar. Wir fassen $c(z) = (f(z), z)$ als Kurve in der x-z-Ebene auf, die bei Rotation um die z-Achse die Rotationsfläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a,b], x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

überstreicht.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Formel (1) aus Aufgabe 2 und der Abbildung

$$F\colon [a,b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (z, \phi) \mapsto (f(z)\cos\phi, f(z)\sin\phi, z),$$

daß der Flächeninhalt $A(M)$ der Rotationsfläche M gegeben ist durch

$$A(M) = 2\pi \int_a^b dz\ f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}\ .$$

(b) Berechnen Sie für die Rotationsfläche zu $f : [-R, R] \ni z \mapsto f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ den Oberflächeninhalt der Kugel vom Radius R.

(c) Eine differenzierbare Kurve $c : [a,b] \ni t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ hat den Linienschwerpunkt $(s_1, \ldots, s_n)$ mit $s_i = \frac{1}{L(c)} \int_a^b dt\ x_i(t)\|c'(t)\|$, wenn $L(c)$ die Bogenlänge von c ist. Zeigen Sie: Ist (s_x, s_z) der Linienschwerpunkt der Kurve $c\colon [a,b] \ni z \mapsto (f(z), z) \in \mathbb{R}^2$ aus (a), dann gilt für den Flächeninhalt der Rotationsfläche die *erste Guldinsche Regel* $A(M) = 2\pi L(c) s_x$.