Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 18/19

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 7.12.2018 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 8

Aufgabe 2. (a) Gegeben seien die Differentialformen

$$\omega = xydx + e^x dy + yzdz, \qquad v = z^2 dx \wedge dy + dx \wedge dz + \cos x \cdot dy \wedge dz.$$

Berechnen Sie das Keilprodukt $\omega \wedge v$ und die äußeren Ableitungen $d\omega$ und dv.

(b) Sei u eine differentielle k-Form mit einem *geraden* k. Zeigen Sie, daß dann $u \wedge du = 0$. (*Hinweis:* Verwenden Sie $u \wedge u = 0$, die graduierte Leibniz-Regel und die graduierte Kommutativität.)

(c) Berechnen Sie für eine differentielle k-Form ω und k'-Form ζ die äußere Ableitung

$$d(d\omega \wedge \zeta - \omega \wedge d\zeta)$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega$ für folgende ω, γ:

(a) $\omega = xdx + xdy + zdz$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ bzw. $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t, \sin^3 t)$.

(b) $\omega = ydx + xdy$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

(c) $\omega = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, wobei $a, b > 0$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Integral der Differentialform $\omega(x,y) = \frac{1}{2}(-ydx + xdy)$ längs der durch $c(t) = ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t)$ definierten Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$. *Bemerkung:* Nach der Sektorformel von Leibniz berechnet dieses Kurvenintegral den Flächeninhalt der Herzkurve.

Aufgabe 4. Prüfen Sie die folgenden DGL auf Exaktheit, bestimmen Sie bei Bedarf einen integrierenden Faktor μ der Form $\mu = \mu(t)$ und lösen Sie die DGL:

(a) $(2t + 3) + (2x(t) - 2)x'(t) = 0$;

(b) $(t^2 + x(t)) - tx'(t) = 0$ für $t > 0$.

(c) $1 + x(t)t^{-2} - x'(t)t^{-1} = 0$ für $t > 0$;

(d) $(2t - x(t)^{-1}) + tx(t)^{-2}x'(t) = 0$.