Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 18/19**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 23.11.2018 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 6

Aufgabe 1. Ein Pferd läuft in x-Richtung bei $x = l > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v_p los. Ein beliebig dehnbares homogenes Band ist mit dem einen Ende im Nullpunkt befestigt, mit dem anderen Ende am Pferd. Eine Schnecke beginnt gleichzeitig mit dem Pferd im Nullpunkt mit konstanter (Relativ-) Geschwindigkeit v_s auf dem Band zu laufen.

(a) Ermitteln Sie den Ort der Schnecke in Abhängigkeit von der Zeit.
(*Zur Kontrolle:* Für den Ort x_s der Schnecke ergibt sich die lineare DGL $x_s'(t) = v_s + x_s(t)\frac{v_p}{tv_p+l}$ mit $x_s(0) = 0$.)

(b) Wird die Schnecke das Pferd erreichen? Geben Sie den Zeitpunkt davon in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der beiden Tiere und der Länge des Bandes an. (*Hinweis:* An der Langlebigkeit der Tiere bestehe kein Zweifel.)

Aufgabe 2. Für stetige Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sei folgendes System von Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in I \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

Eine Lösung $\binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ von (1) sei bekannt, und es gelte $y_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Um eine weitere Lösung x von (1) zu finden, wähle man eine skalare nichtkonstante Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ und setze $\binom{x_1(t)}{x_2(t)} = \phi(t) \cdot \binom{y_1(t)}{y_2(t)} + z(t)$ mit $z = \binom{0}{z_2}$. Zeigen Sie:

(a) Diese Funktion $x = \binom{x_1}{x_2}$ ist genau dann Lösung von (1), wenn

$$a_{12}z_2 - \phi' y_1 = 0 \quad \text{und} \quad z_2' = \Big(a_{22} - a_{12}\frac{y_2}{y_1}\Big) z_2 \,. \tag{2}$$

(b) Ist (z_2, ϕ) eine Lösung von (2), so ist $\phi \cdot \binom{y_1}{y_2} + \binom{0}{z_2}$ eine Lösung von (1), und $\begin{pmatrix} y_1 & \phi y_1 \\ y_2 & \phi y_2 + z_2 \end{pmatrix}$ ist ein Lösungs-Fundamentalsystem.

Aufgabe 3. Sei $A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem der DGL $x'(t) = A(t)x(t)$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ mit $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(t) - t \cdot y(t) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

mit dem Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Geben Sie die Folge $\{\binom{y_n}{y'_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ an, die in einem Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$ gegen die Lösung konvergiert.

(b) Ermitteln Sie genügend viele ($n \leq 4$ oder $n \leq 5$ sollte reichen) Approximationen, so daß Sie die Lösungsreihe $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ erraten können. Auf den Induktionsbeweis kann verzichtet werden.

(c) Verwenden Sie $2 \cdot 5 \cdots (3n-1) = 3^n(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\cdots(n-\frac{1}{3}) = 3^n \frac{\Gamma(n+\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}$, um die Lösung für $t > 0$ auszudrücken in der Form $y(t) = f(t)\, I_p(g(t))$ mit geeigneten Funktionen f, g und $p \in \mathbb{R}$, wobei $I_p(r) := \frac{r^p}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{4^n \cdot n! \cdot \Gamma(p+n+1)}$ die modifizierte Bessel-Funktion ist.