Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **WS 18/19**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 16.11.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $c \in \mathcal{C}^2([a,b])$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (t,q,v) \mapsto q\sqrt{1+v^2},$$

für alle $t \in [a,b]$. Zeige:

(a) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{R}$ so, daß für alle $t \in]a,b[$ gilt:

$$\frac{c(t)c'(t)^2}{\sqrt{1+c'(t)^2}} - c(t)\sqrt{1+c'(t)^2} = -\gamma.$$

(*Hinweis:* Energieerhaltungssatz.)

(b) $c(t) = \gamma\sqrt{1+c'(t)^2}$ für alle $t \in [a,b]$.

(*Bemerkung:* Das zugehörige Variationsproblem besteht darin, für eine Kurve zwischen vorgegebene Randpunkten den Oberflächeninhalt der zugehörige Rotationsfläche (bei Drehung um die x-Achse) zu minimieren.)

Aufgabe 2. Durch eine in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ positiv definite symmetrische Matrix $G(x) = G^t(x) = (g_{ij}(x))_{ij} \in GL(n,\mathbb{R})$ werde punktweise ein allgemeines Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_{G(x)}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\langle v, w\rangle_{G(x)} := \langle v, G(x)w\rangle$ definiert. Wir betrachten die zugehörige Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,q,v) \mapsto \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_{G(q)}.$$

Sei $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, eine auf $]a,b[$ zweimal differenzierbare Lösung der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k}\right)(t, c(t), c'(t)) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right)(t, c(t), c'(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n,\ t \in]a,b[.$$

(a) Zeigen Sie, daß dann für alle $1 \leq i \leq n$ und $t \in]a,b[$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{kj}(c(t))c_j''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}(c(t))c_i'(t)c_j'(t) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(t))c_i'(t)c_j'(t) = 0.$$

(b) Benutzen Sie (a), die Symmetrie $G = G^t$ und die inverse Matrix $G^{-1}(x) = (h_{lk}(x))_{lk} \in GL(n, \mathbb{R})$, um folgende *Geodätengleichung* zu erhalten:

$$0 = c_l''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l}(c(t))c_i'(t)c_j'(t) \quad \text{für } l = 1, \ldots, n,\ t \in]a, b[,$$

$$\text{wobei } \Gamma_{ij}^{l}(c(t)) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} h_{lk}(c(t)) \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}(c(t)) + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}(c(t)) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(t)) \right).$$

(*Bemerkung:* In der allgemeinen Relativitätstheorie beschreibt die *Metrik* G das Gravitationsfeld und die Geodätengleichung die Bahnen von Testteilchen in solch einem Feld.)

Aufgabe 3. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (in einer Umgebung ihrer Anfangsdaten):

(a) $x'(t) = \sqrt{1 + (x(t))^2} \cos t$ mit $x(0) = 0$.

(b) $x'(t) = \frac{\cos(x(t))}{1+2t}$ mit $x(0) = 0$. (*Hinweis:* $\frac{1}{\cos y} = \frac{\cos y}{\cos^2 y}$)

Aufgabe 4. *(Auflösung fester Stoffe)*
Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel L aufgelöst wird, ist proportional zu der noch nicht aufgelösten Menge von S und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes.

(a) Zur Zeit $t_0 = 0$ mögen in einem Behälter mit 100 kg des Lösungsmittels 10 kg des Stoffes S eingebracht werden. Die Sättigungskonzentration sei $1/4$. Stellen Sie eine DGL für die Menge $u(t)$ des zur Zeit $t > 0$ gelösten Stoffes S (in kg) auf. (Diese wird eine Proportionalitätskonstante k enthalten. Die Konzentration des gelösten Stoffes ist in diesem Modell $u(t)/100$ und *nicht* $u(t)/(100 + u(t))$.)

(b) Lösen Sie das AWP mittels Trennung der Variablen. Verwenden Sie dazu eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(10 - v)(25 - v)} = \alpha \left(\frac{1}{10 - v} - \frac{1}{25 - v} \right)$$

mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$. (Nur zur Probe: Die Lösung ist $u(t) = 10(1 + \frac{3}{2 - 5e^{0,15kt}})$.)

(c) In der Lösung tritt noch eine Proportionalitätskonstante k auf. Wie groß ist sie, wenn nach $t = 10$ Minuten eine Lösungskonzentration von $1/20$ gemessen wird?