Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 18/19**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 9.11.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Koordinaten und Wert des Maximums und Minimums der Funktion $g(x,y,z) = x+y+z$ auf der Menge $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 = 4,\ x+y = 2\}$.

Aufgabe 2. Es sei $p \in \mathbb{R}, p > 1, a \in \mathbb{R}^n$. Betrachtet werde die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \langle a, x\rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ und die durch $f(x) = 1 - \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0$ gegebene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, daß die Einschränkung von F auf M das absolute Maximum $\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q}$ und das absolutes Minimum $-\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q}$ hat, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

(b) Man folgere:

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\ .$$

Aufgabe 3. (a) Sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbar und nach Bogenlänge parametrisiert. Zeige: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\langle c''(t), c'(t)\rangle = 0$.

(b) Die Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ beschreibe die Bewegung eines Teilchens mit konstanter Geschwindigkeit v entlang eines Kreises vom Radius r um $0 \in \mathbb{R}^2$. Man zeige, daß für die Beschleunigung c'' gilt: $c''(t) = -\frac{v^2}{r^2}c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. Bestimme die Bogenlänge s

(a) der Kettenlinie $y(x) = a\cosh\frac{x}{a}$ für $0 \leq x \leq x_0$, wobei $a > 0$.

(b) der Astroide $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

(c) der logarithmischen Spirale, gegeben in Polarkoordinaten durch $r(\phi) = ae^{m\phi}$ für $0 \leq \phi \leq \phi_0$, wobei $a, m > 0$.