Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 17/18**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 14.12.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 8

Aufgabe 1. Es sei $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$. Beweisen Sie:

(a) Der Konvergenzradius von f ist ∞.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $2f(z) \cdot f(z) = 1 + f(2z)$.

Hinweis: Ergänzen Sie den in der Doppelsumme entstehenden Ausdruck zu $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ und berechnen Sie diese Summe der Binomialkoeffizienten als Funktion von n.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} z^n$$

(b) $$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) $$C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{5n}}{5n^2 3^n}$$

(d) die *hypergeometrische Reihe* zu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$:

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} z^n, \quad \text{wobei } (\delta)_n := \delta(\delta+1)(\delta+2)\cdots(\delta+n-1).$$

Aufgabe 3. Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer Vektorraum, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und $v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) $\|v\| = \|w\| \iff \langle v - w, v + w\rangle = 0$.

(b) $\|v - w\| = \|v + w\| \iff \langle v, w\rangle = 0$.

(c) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \langle v, w\rangle = 0$.

(d) Für $w \neq v$ gilt: $\left\| v - 2\dfrac{\|v\|^2}{\|v - w\|^2}(v - w) \right\| = \|v\| \iff \langle v, w\rangle = 0$.

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^2$ sind (a)–(c) wichtige Beziehungen zwischen den Längen von Seiten und Diagonalen in besonderen Vierecken. Können Sie eine Interpretation geben?

(b.w.)

Aufgabe 4. Welche der folgenden Abbildungen $N_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ definiert eine Norm? (Begründung erforderlich)

(a) $$N_1((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{(x_1 - 2x_2)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2}\ ,$$

(b) $$N_2((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{|x_1 - 2x_2| + |x_2 - 2x_3| + |x_3 - 2x_1|}\ ,$$

(c) $$N_3((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2}\ ,$$

(d) $$N_4((x_1, x_2, x_3)) = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} + \sqrt{|x_3|}\right)^2$$