

Übungen zu Mathematik für Physiker III  
Zusatzübungen

Blatt 10

---

Diese Aufgaben müssen nicht abgegeben werden; sie werden aber bei Abgabe bis zum

9.1.2015 bis 10h00 in den Briefkästen

korrigiert. Die erreichten Punkte werden als Zusatzpunkte gewertet.

**Aufgabe 1.** Seien  $u, v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $f = u + iv: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und

$$\partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), \quad \partial_{\bar{z}} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f).$$

Ferner sei  $\bar{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ . Zeigen Sie:

- (a)  $f$  ist genau dann in  $z \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, wenn  $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$ , und in dem Fall gilt  $f'(z) = \partial_z f(z)$ .
- (b)  $\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}} \bar{f}$  und  $\overline{\partial_{\bar{z}} f} = \partial_z \bar{f}$ . Sind  $f$  und  $\bar{f}$  holomorph, so ist  $f$  konstant.
- (c) Ist  $f$  zweimal reell differenzierbar, so gilt für den Laplace-Operator  $\Delta = \partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y$  die Beziehung  $\Delta f = 4\partial_z \partial_{\bar{z}} f = 4\partial_{\bar{z}} \partial_z f$ . Insbesondere sind, falls  $f$  holomorph ist,  $u$  und  $v$  harmonisch in dem Sinn, daß  $\Delta u = 0 = \Delta v$ .
- (d) Ist  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  reell differenzierbar, so gilt  $\partial_z(fg) = (\partial_z f)g + f(\partial_z g)$ . Für alle  $k, l \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 1$  gilt  $\partial_z(z^k \bar{z}^l) = k z^{k-1} \bar{z}^l$  und  $\partial_{\bar{z}}(z^l \bar{z}^k) = k z^l \bar{z}^{k-1}$ .

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie für  $P(z) = z^4 + 6z + 3$ :

- (a) Das Polynom  $P(z)$  besitzt eine Nullstelle  $a$  mit  $|a| < 1$ .
- (b) Die anderen Nullstellen liegen im Ringgebiet  $1 < |z| < 2$ .

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie folgende Integrale:

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}$       b)  $\int_0^{2\pi} dx \frac{1}{5+4\sin x}$