Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch

WS 2014/15

Probeklausur zur Mathematik für Physiker III

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an der Klausur am 9.2.2015 sind erforderlich:
  - (1a) Eine Anmeldung im QISPOS zur Klausur (Modulabschlußprüfung).
  - (2a) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1578+1579. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 5.2.2015. Bitte schreiben Sie die Klausur in jenen Hörsaal, für den Sie sich angemeldet haben.
- Zur Teilnahme an der 2. Klausur am 26.3.2015 sind erforderlich:
  - (1b) Eine Anmeldung im QISPOS zur 2. Klausur (Modulabschlußprüfung). Falls die 1. Klausur mitgeschrieben und nicht bestanden wurde, kann diese Anmeldung erst ab Eintrag der Ergebnisse der 1. Klausur erfolgen, also erst einige Tage nach Klausureinsicht.
  - (2b) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1580. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 23.3.2015.
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2012/13.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Die Probeklausur wird voraussichtlich am 4.2.2015 oder 5.2.2015 ab 18h00 vorgerechnet. Der genaue Termin wird über die Internetseite bekanntgegeben.

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie alle (Kandidaten für) Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy + z$ auf dem Ellipsoid $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

(b) Begründen Sie, daß die Gleichung $F(x,y,z) = x^2+y^2-2xy+z-\frac{5}{4}\tan(\frac{\pi}{2}xyz) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(1, \frac{1}{2}, 1)$ nach $z(x,y)$ aufgelöst werden kann, und bestimmen Sie $(\partial_x z)(1, \frac{1}{2})$ und $(\partial_y z)(1, \frac{1}{2})$.

Aufgabe 2. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (gegebenenfalls in einer Umgebung ihrer Anfangsdaten):

(a) $x'(t) = (1 + (x(t))^2)e^{-t} \sin t$ mit $x(0) = 1$.

(b) $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) + te^{-t} = 0$ mit $x(0) = 1$ und $x'(0) = 0$.

(c) $\big(x^2 + \sin y(x)\big) + \big(x \cos y(x)\big) y'(x) = 0$ mit $y(1) = \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{x \sin x}{a^2 + x^2}$ als Funktion von $a > 0$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt \, \frac{1}{(1 + 2p \cos t + p^2)^2}$ als Funktion von $-1 < p < 1$.

Aufgabe 4. Es sei $(x,y,z) := T(r,\phi,z) = \Big(4zr\cos\phi + zr\cos(4\phi),\ 4zr\sin\phi + zr\sin(4\phi),\ z\Big)$ und $K := T([0, \frac{R}{h}] \times [0, 2\pi] \times [0, h]) \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kegel über der dreiblättrigen Blütenfläche. Die Dichte sei konstant: $\mu = 1$.

(a) Zeigen Sie: $(\det DT)(r,\phi,z) = 20z^2 r(1 + \cos(3\phi))$.

(b) Berechnen Sie die Masse von K.

(c) Berechnen Sie den Schwerpunkt (s_x, s_y, s_z) von K.

(d) Berechnen Sie das Trägheitsmoment von K bei Rotation um die x-Achse.

(e) Berechnen Sie den Umfang der Schnittfläche von K mit der Ebene $z = h$, d.h. der Kurve $c(\phi) = T(\frac{R}{h}, \phi, h)$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$.

Hinweise: Denken Sie an die Additionstheoreme. In c),d) helfen Eigenschaften von Integralen über trigonometrische Funktionen, die aus der Theorie der Fourier-Reihen bekannt sind. In e) wird $1 + \cos u = 2\cos^2 \frac{u}{2}$ benötigt.