Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Probeklausur zur Mathematik für Physiker I

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an einer der Klausuren am 10.2.2014 bzw. 28.3.2014 sind erforderlich:
  - (1) Eine bis Ende 2013 erfolgte QISPOS-Anmeldung zur Vorlesung.
  - (2a) Für die erste Klausur: Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1673-1676. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 6.2.2014. Bitte schreiben Sie die Klausur in jenen Hörsaal, für den Sie sich angemeldet haben.
  - (2b) Für die zweite Klausur: Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1678. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 24.3.2014
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2011/12.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Nach gegenwärtiger Planung wird die Probeklausur in der Vorlesung am 6.2.2014 vorgerechnet.

Aufgabe 1. Beweisen Sie:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \frac{4^n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Hinweis zu (b): Am einfachsten ist eine geeignete Nutzung der binomischen Formel. Induktion nach n führt zumindest nicht direkt zum Ziel.

Aufgabe 2. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \\ t+2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ s \end{pmatrix}, \qquad W_t := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) \; .$$

(a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(W_t)$ als Funktion von $t \in \mathbb{R}$.

(b) Für $t = 0$ gibt es genau ein $s \in \mathbb{R}$, so daß $w_s \in W_0$. Bestimmen Sie diese Zahl s.

(c) Bestimmen Sie für $t = 0$ und $s \in \mathbb{R}$ aus (b) die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $w_s = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i$.

Aufgabe 3. Es sei $0 \leq a \leq 1$. Zeigen Sie: Für einen beliebigen Startwert x_0 mit $0 \leq x_0 \leq 1$ konvergiert die durch $x_{n+1} := \frac{2x_n + a}{x_n^2 + 2}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt[3]{a}$.

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{5+12\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}\, z\Big)^n$.

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte (mit $e = \lim_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n$):

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{1 - \cos x}$ (b) $\lim_{x \to e} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x - \tan(\frac{\pi x}{4e})}$

Aufgabe 6. Ein Ball, der aus einer Anfangshöhe $h > 0$ mit Geschwindigkeit $v > 0$ unter einem Winkel $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ abgeworfen wird, erreicht bei Vernachlässigung der Reibung die Wurfweite

$$L(\alpha) = A \cos\alpha \big(\sin\alpha + \sqrt{H + \sin^2\alpha}\big) \; , \qquad A := \frac{v^2}{g} \; , \; H := \frac{2gh}{v^2} \; .$$

(a) Begründen Sie, daß es für gegebene Werte $A, H > 0$ zumindest einen Winkel $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gibt, für den die Wurfweite maximal wird.

(b) Bestimmen Sie einen Winkel α_0, für den die Wurfweite maximal wird, als Funktion von A, H.