Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 24.10.2013 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 1

Aufgabe 1. Man zeige: Ist X eine *endliche* Menge (d.h. X besteht aus endlich vielen Elementen), dann gilt für eine Abbildung $f : X \to X$:

$$f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv}$$

Bemerkung: Das Beispiel $f(n) := n + 1$ einer injektiven, aber nicht surjektiven, Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zeigt, daß das für unendliche Mengen nicht gilt!

Aufgabe 2. Es seien X, Y Mengen, $M_1, M_2 \subseteq X$ sowie $N_1, N_2 \subseteq Y$ Teilmengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $X \setminus (M_1 \cup M_2) = (X \setminus M_1) \cap (X \setminus M_2)$ sowie $X \setminus (M_1 \cap M_2) = (X \setminus M_1) \cup (X \setminus M_2)$

(b) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

(c) $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$, im allgemeinen aber keine Gleichheit.

(d) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$ und $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$

Aufgabe 3. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \qquad n \geq 1$

Aufgabe 4. Beweisen Sie:

(a) $2^{n+1} + 3 \cdot 7^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann ist die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch n teilbar.