Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 12/13**
Dr. T. Timmermann

Übung zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 22.01.2013, 12 Uhr in den Briefkästen Blatt 13

Aufgabe 1. Wir betrachten den homogenen Torus

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des Torus.

(b) Sei $V \subset \mathbb{R}^2$, $\phi\colon V \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $K \subseteq V$ kompakt. Dann ist der *Flächeninhalt* $A(\phi(K))$ der Fläche $\phi(K) \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A(\phi(K)) = \int_K dx \sqrt{\det((D\phi)(x)^t (D\phi)(x))}\ .$$

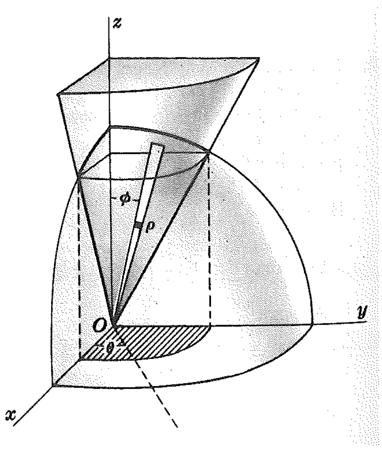
Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel und der Parametrisierung

$$\phi\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (4 - \cos\beta)\cos\alpha \\ (4 - \cos\beta)\sin\alpha \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

den Oberflächeninhalt des Torus.

(c) Berechnen Sie die in (b) gesuchte Oberfläche noch einmal mit der folgenden *ersten Guldinschen Regel*: Rotiert man eine Kurve der Länge l in der x, z-Ebene um die z-Achse, so ist der Oberflächeninhalt der Rotationsfläche gegeben durch $A = lU$, wobei U der Umfang des Kreises ist, den der Schwerpunkt der Kurve bei der Rotation beschreibt.

Aufgabe 2.



Wir betrachten den Körper K, der von einem Viertel eines Kegels vom Winkel 60° durch die Kugel vom Radius $r = 2$ abgeschnitten wird, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist.

(a) Bestimme das Volumen und die z-Koordinate des Schwerpunktes von K.

(b) Bestimme das Trägheitsmoment von K bezüglich der z-Achse.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Ellipsoid-Oktanten $EO = \Delta^{2,2,2}_{a,b,c}$ mit homogener Dichte und Parametern $a, b, c > 0$ über die Jacobi-Transformation. (*Hinweise:* Aufgrund der Symmetrie genügt es, eine Koordinate auszurechnen. Es gilt $B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.)