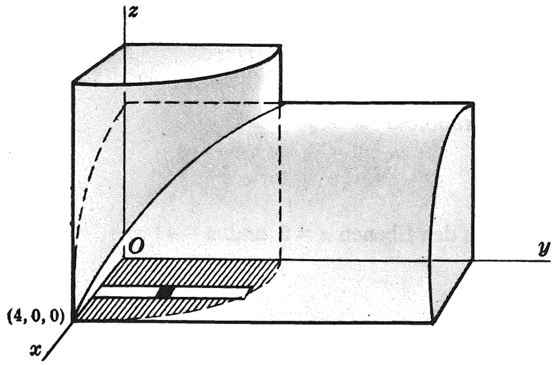
Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 12/13**
Dr. T. Timmermann

Übung zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 15.01.2013, 12 Uhr in den Briefkästen Blatt 12

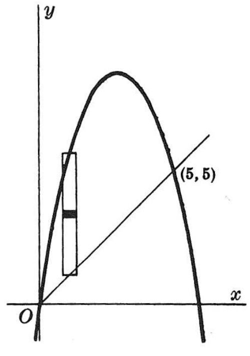
Aufgabe 1. (a) Wir betrachten die Schnittfläche, die von den Parabeln $y = 1 - x^2$ und $y = (1-x)^2$ begrenzt wird. Geben Sie Integrationsgrenzen $x_1(y), x_2(y)$ und $y_1(x), y_2(x)$ so an, dass ihre Masse bezüglich einer beliebigen Dichte μ gegeben ist durch $\int_0^1 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\ \mu(x,y)$ beziehungsweise $\int_0^1 dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\ \mu(x,y)$.

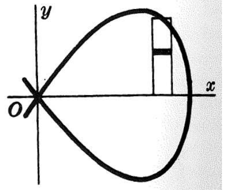
(b) Wir betrachten den Schnittkörper zweier Vollzylinder mit Radius 4, deren Rotationsachse die y-Achse beziehungsweise z-Achse ist. Geben Sie Integrationsgrenzen $y(x)$ und $z(x,y)$ so an, dass seine Masse bezüglich einer beliebigen Dichte μ gegeben ist durch $8 \int_0^4 dx \int_0^{y(x)} dy \int_0^{z(x,y)} dz\, \mu(x,y,z)$.



Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Parabel $y = 6x - x^2$ und der Gerade $y = x$ begrenzt wird.

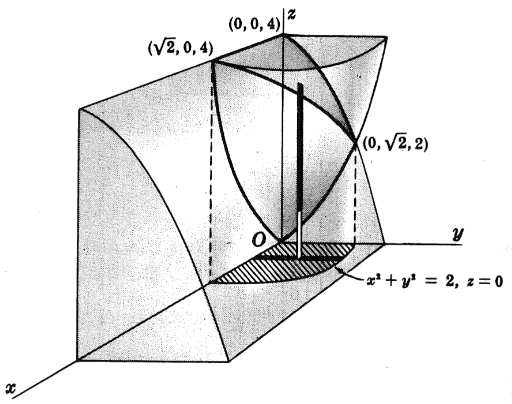
(b) Bestimmen Sie die Trägheitsmomente der von der Schleife $y^2 = x^2(2-x)$ eingeschlossenen Fläche bezüglich der x-Achse und der y-Achse. (*Hinweis:* Substituieren Sie in den sich ergebenden Integralen $2 - x = t^2$.)

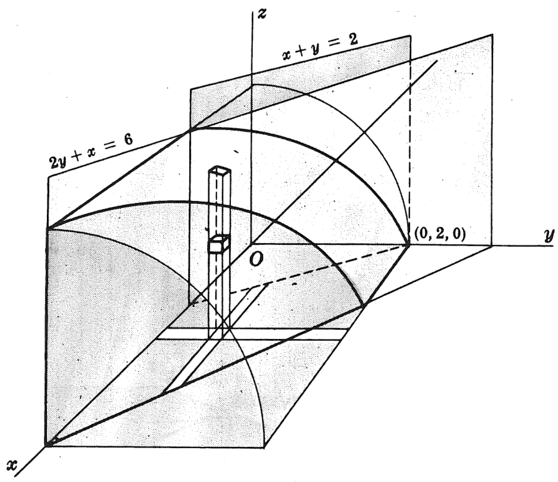




Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie das Volumen, das von dem Paraboloid $z = 2x^2+y^2$ und der Fläche $z = 4-y^2$ eingeschlossen wird. (*Hinweis:* Integrieren Sie in der Reihenfolge $\int dx \int dy \int dz$ mit gegeeigneten Grenzen.)

(b) Bestimmen Sie die Masse des Körpers, der im ersten Oktanten durch die Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ und den Zylinder $y^2 + z^2 = 4$ begrenzt wird, wenn die Dichte an der Stelle (x, y, z) gleich z ist. (*Hinweis:* Integrieren Sie in der Reihenfolge $\int dy \int dx \int dz$ mit gegeeigneten Grenzen.)

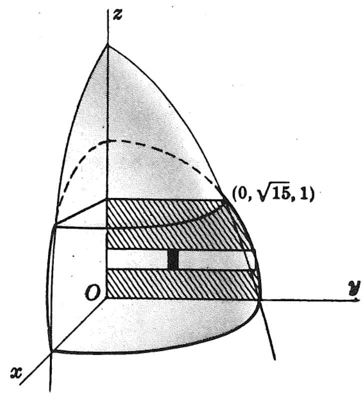




Aufgabe 4. Sei $a < b$ und $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$ stückweise stetig differenzierbar. Bei Rotation um die x-Achse überstreicht der Graph von f die Rotationsfläche $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 = f(x)^2\}$, deren Oberflächeninhalt gegeben ist durch

$$2\pi \int_a^b dx \cdot f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

(a) Berechnen Sie die Fläche des Teils der Kugel $x^2+y^2+z^2 = 16$, der außerhalb des Parabeloids $x + y^2 + z^2 = 16$ liegt.



(Im Bild sind die x- und z-Achsen vertauscht)

(b) Bezeichne V das Volumen des Körpers $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$ und A den Flächeninhalt unter dem Graphen von f sowie U den Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Fläche unter dem Graphen bei der Rotation um die x-Achse beschreibt. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Cavalieri die *zweite Guldinsche Regel* $V = AU$.