Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich Mathematik

Hausarbeit zum Seminar „Integraltransformationen“

Hankel-Transformation

eingereicht von: Lisa-Marie Oberle

eingereicht am: 7. Dezember 2012

Betreuer: Herr Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitende Definitionen und Eigenschaften

Dieses Kapitel bezieht sich hauptsächlich auf [3] und [5].

1.1 Definition (Bessel-Funktionen)

Bessel-Funktionen sind die Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \qquad \text{für } p \in \mathbb{R},\ p > -\frac{1}{2}\ .$$

Dabei ist die Bessel-Funktion erster Gattung, p-ter Ordnung durch

$$J_p(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\ \Gamma(p+k+1)}$$

definiert.

1.2 Eigenschaften der Bessel-Funktionen

Wichtige Eigenschaften der Bessel-Funktionen sind folgende Rekursionsbeziehungen. Wir werden diese für den Nachweis einiger Eigenschaften der Hankel-Transformation benötigen.

$$J_p(x) = \frac{x}{2p}\left(J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)\right) \tag{1.1}$$

$$J_p'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x)\right) \tag{1.2}$$

$$J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x}J_p(x) \tag{1.3}$$

$$J_p'(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x}J_p(x) \tag{1.4}$$

$$J_p''(x) = -J_p(x) - \frac{p}{x^2}J_p(x) + \frac{p^2}{x^2}J_p(x) + \frac{1}{x}J_{p+1}(x) \tag{1.5}$$

Asymptotisches Verhalten:

Es gilt

$$J_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \qquad \text{für } x \to \infty\ . \tag{1.6}$$

2 Die Hankel-Transformation

Dieses und das folgende Kapitel „Eigenschaften der Hankel-Transformation" beziehen sich auf die Darlegungen aus [1], [3], und [4].

2.1 Definition (Hankel-Transformation)

Sei $f(r)$ eine Funktion mit $r \geq 0$. Dann ist die Hankel-Transformation $\mathscr{H}_\nu$ der Ordnung ν von f gegeben durch

$$F_\nu(s) \equiv \mathscr{H}_\nu\{f(r)\} \equiv \int_0^\infty r f(r) J_\nu(sr) dr \ . \tag{2.1}$$

Für $\nu > -\frac{1}{2}$ gilt die Umkehrformel

$$f(r) = \mathscr{H}_\nu^{-1}\{F_\nu(s)\} \equiv \int_0^\infty s F_\nu(s) J_\nu(sr) ds \ . \tag{2.2}$$

2.2 Beispiel

Sei $f(r) = r^\nu h(a-r)$, wobei $a > 0$ und $h(r-a) = \begin{cases} 0 & r > a \\ 1 & r \leq a \end{cases}$,

dann ist die Hankel-Transformation von f gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_\nu\{r^\nu h(a-r)\} &= \int_0^\infty r^{\nu+1} h(a-r) J_\nu(sr) dr \\ &= \int_0^a r^{\nu+1} J_\nu(sr) dr \ . \end{aligned}$$

Substituiere nun $x = sr \Leftrightarrow r = \frac{x}{s}$. Daraus folgt $\frac{dx}{dr} = s \Leftrightarrow dr = \frac{dx}{s}$ und damit

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_\nu\{r^\nu h(a-r)\} &= \int_0^{as} \left(\frac{x}{s}\right)^{\nu+1} J_\nu(x) \frac{dx}{s} \\ &= \frac{1}{s^{\nu+2}} \int_0^{as} x^{\nu+1} J_\nu(x) dx \ . \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\int_a^b t^\nu J_{\nu-1}(t)dt &\overset{(1.3)}{=} \int_a^b t^\nu J_\nu'(t)dt + \int_a^b t^{\nu-1}\nu J_\nu(t)dt \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} t^\nu J_\nu(t)\Big|_a^b - \int_a^b \nu t^{\nu-1} J_\nu(t)dt + \int_a^b t^{\nu-1}\nu J_\nu(t)dt \\
&= t^\nu J_\nu(t)\Big|_a^b ,
\end{aligned}$$

wobei $0 < a < b$, folgt

$$\mathscr{H}_\nu\{r^\nu h(a-r)\} = \frac{(as)^{\nu+1}}{s^{\nu+2}} J_{\nu+1}(as) = \frac{a^{\nu+1}}{s} J_{\nu+1}(as) \ .$$

3 Eigenschaften der Hankel-Tranformation

3.1 Hankel-Transformation der Ableitung

Sei $F_\nu(s) = \mathscr{H}_\nu\{f(x)\}$ mit $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ endlich und $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} f(x) = 0$, dann gilt

$$G_\nu(s) = \mathscr{H}_\nu\{f'(x)\} = -s\left[\frac{\nu+1}{2\nu}F_{\nu-1}(s) - \frac{\nu-1}{2\nu}F_{\nu+1}(s)\right].$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} G_\nu(s) &\overset{(2.1)}{=} \int_0^\infty x f'(x) J_\nu(sx) dx \\ &\overset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{x f(x) J_\nu(sx)\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty f(x) \frac{d}{dx}\Big[x J_\nu(sx)\Big] dx \\ &= -\int_0^\infty f(x) \frac{d}{dx}\Big[x J_\nu(sx)\Big] dx \ . \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big[x J_\nu(sx)\Big] &= J_\nu(sx) + sx J'_\nu(sx) \\ &\underset{(1.2)}{\overset{(1.1)}{=}} \frac{sx}{2\nu} J_{\nu-1}(sx) + \frac{sx}{2\nu} J_{\nu+1}(sx) + sx\left(\frac{1}{2}J_{\nu-1}(sx) - \frac{1}{2}J_{\nu+1}(sx)\right) \\ &= \frac{sx}{2\nu}\Big[(\nu+1)J_{\nu-1}(sx) - (\nu-1)J_{\nu+1}(sx)\Big] \end{aligned}$$

folgt

$$G_\nu(s) = -s\left[\frac{\nu+1}{2\nu}F_{\nu-1}(s) - \frac{\nu-1}{2\nu}F_{\nu+1}(s)\right] \ .$$

□

3.2 Hankel-Transformation des Bessel-Operators

Sei $f(r)$ zweimal differenzierbar und es gelte $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} f'(x) = 0$.

Dann gilt

$$\mathscr{H}_\nu\{\Delta_\nu f(r)\} \equiv -s^2 \mathscr{H}_\nu\{f(r)\} \tag{3.1}$$

mit

$$\Delta_\nu = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \left(\frac{\nu}{r}\right)^2 \ . \tag{3.2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_\nu\{\Delta_\nu f(r)\} &\overset{(2.1)}{=} \int\limits_0^\infty r \left[\frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} f(r) - \frac{\nu^2}{r^2} f(r)\right] J_\nu(sr) dr \\
&= \int\limits_0^\infty r \left(\frac{d^2}{dr^2} f(r)\right) J_\nu(sr) dr + \int\limits_0^\infty r \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} f(r)\right) J_\nu(sr) dr \\
&\quad - \int\limits_0^\infty r \left(\frac{\nu^2}{r^2} f(r)\right) J_\nu(sr) dr
\end{aligned}$$

Indem man diese Summanden partiell integriert, erhält man

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_\nu\{\Delta_\nu f(r)\} = &\underbrace{\left(\frac{d}{dr} f(r)\right) r J_\nu(sr)\Big|_0^\infty}_{(A)} \underbrace{- f(r)\left(J_\nu(sr) + r\frac{d}{dr} J_\nu(sr)\right)\Big|_0^\infty}_{(B)} \\
&+ \int\limits_0^\infty f(r)\left(2 \cdot \frac{d}{dr} J_\nu(sr) dr + r\frac{d^2}{dr^2} J_\nu(sr)\right) \\
&\underbrace{+ f(r) J_\nu(sr)|_0^\infty}_{(C)} - \int\limits_0^\infty f(r) \frac{d}{dr} J_\nu(sr) dr - \int\limits_0^\infty \frac{\nu^2}{r^2} J_\nu(sr) r f(r) dr \ .
\end{aligned}$$

Hier heben sich (C) und ein Teil von (B) gegenseitig auf. Mit der Bedingung an f und dem asymptotischen Verhalten der Bessel-Funktion (1.6) fallen (A) und der restliche Teil von (B) weg. Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}_\nu\{\Delta_\nu f(r)\} &= \int\limits_0^\infty \left[\frac{d^2}{dr^2}J_\nu(sr)dr + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}J_\nu(sr) - \frac{\nu^2}{r^2}J_\nu(sr)\right] rf(r) \\
&= \int\limits_0^\infty \left[s^2 J''_\nu(sr) + \frac{s}{r}J'_\nu(sr) - \frac{\nu^2}{r^2}J_\nu(sr)\right] rf(r)dr \\
&= -s^2 \int\limits_0^\infty \left[-J''_\nu(sr) - \frac{1}{sr}J'_\nu(sr) + \frac{\nu^2}{s^2r^2}J_\nu(sr)\right] rf(r)dr \ .
\end{aligned}
$$

Substituiere nun $x = sr \Leftrightarrow r = \frac{x}{s}$. Daraus folgt $\frac{dx}{dr} = s \Leftrightarrow dr = \frac{dx}{s}$ und damit

$$
\mathscr{H}_\nu\{\Delta_\nu f(r)\} = -s^2 \int\limits_0^\infty \left[-J''_\nu(x) - \frac{1}{x}J'_\nu(x) + \frac{\nu^2}{x^2}J_\nu(x)\right] \frac{x}{s} f\left(\frac{x}{s}\right)\frac{dx}{s} \ .
$$

Verwendet man hier (1.4) und (1.5), erhält man

$$
\begin{aligned}
-J''_\nu(x) - \frac{1}{x}J'_\nu(x) + \frac{\nu^2}{x^2}J_\nu(x) &= J_\nu(x) - \frac{1}{x}J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x^2}J_\nu(x) - \frac{\nu^2}{x^2}J_\nu(x) + \frac{1}{x}J_{\nu+1}(x) \\
&\quad - \frac{\nu}{x^2}J_\nu(x) + \frac{\nu^2}{x^2}J_\nu(x) \\
&= J_\nu(x)
\end{aligned}
$$

und mit der Rücksubstitution

$$
\mathscr{H}_\nu\{\Delta_\nu f(r)\} = -s^2 \int\limits_0^\infty J_\nu(sr) rf(r)dr \equiv -s^2 \mathscr{H}_\nu\{f(r)\} \ .
$$

□

3.3 Ähnlichkeit

Es gilt

$$
\mathscr{H}_\nu\{f(ar)\} = \frac{1}{a^2}F_\nu\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{für } a \neq 0 \ .
$$

Beweis.

$$\mathscr{H}_\nu\{f(ar)\} \overset{(2.1)}{=} \int\limits_0^\infty r f(ar) J_\nu(sr) dr$$

Substituiere nun $x = ar \Leftrightarrow r = \frac{x}{a}$. Daraus folgt $\frac{dx}{dr} = a \Rightarrow dr = \frac{dx}{a}$ und damit

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_\nu\{f(ar)\} &= \int\limits_0^\infty \frac{x}{a} f(x) J_\nu\left(\frac{xs}{a}\right) \frac{dx}{a} \\
&= \frac{1}{a^2} \int\limits_0^\infty x f(x) J_\nu\left(\frac{xs}{a}\right) dx \\
&= \frac{1}{a^2} F_\nu\left(\frac{s}{a}\right) \ .
\end{aligned}$$

□

4 Anwendungen

4.1 Ungeladene Kreisscheibe im homogenen Feld

Aus den statischen, d.h. zeitunabhängigen *Maxwell-Gleichungen* folgt in der Coulomb- und Lorentz-Eichung, dass das Skalarpotential $v(\vec{r})$ der *Statischen Poisson-Gleichung* $\Delta v \sim \rho(\vec{r})$ genügt. Hierbei gibt $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ den zeitunabhängigen Ortsvektor an.

Für eine elektrisch ungeladene, d.h. $\rho(\vec{r}) = 0$, aber leitende Kreisscheibe im Vakuum in der Ebene $z = 0$ mit Radius $R \equiv 1$ reduziert sich dies auf die statische Laplace-Gleichung mit $\Delta v = 0$ [6].

Weiterhin betrachten wir nur den Halbraum $z > 0$. Es ist zweckmäßig aufgrund der vorliegenden Geometrie, Zylinderkoordinaten einzuführen, so dass sich der Laplace-Operator in der Form

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{4.1}$$

schreiben lässt, wobei v ein beliebiges skalares Feld ist [2].

Für ein radialsymmetrisches Problem, d.h. $\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0$, wird (4.1) zu

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \ . \tag{4.2}$$

Das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} v(\vec{r})$ besitzt außerhalb der Kreisscheibe, d.h. für $r > R \equiv 1$ in der Ebene $z = 0$ keine z-Komponente, also $\vec{E} \cdot \vec{e}_z = 0$. Die Randbedingungen

$$v(r,0) = v_0, \qquad 0 \le r < 1 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(r,0) = 0, \qquad r > 1 \tag{4.4}$$

fassen diese Problemstellung mathematisch zusammen, wobei $v \in \mathbb{R}$.

Sei

$$V(s,z) = \mathscr{H}_0\{v(r,z)\} \ .$$

Wendet man die Hankel-Transformation auf die Laplace-Gleichung an und benutzt die Hankel-Transformation des Bessel-Operators (3.1) erhält man

$$\mathscr{H}_0\{\nabla^2 v\} = -s^2 V(s,z) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(s,z) = 0 \ .$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$V(s,z) = A(s)e^{-sz} + B(s)e^{sz} \ ,$$

wobei die Funktionen $A(s)$ und $B(s)$ mithilfe der Randbedingungen von v bestimmt werden müssen. Für $z \to +\infty$ soll $V(s,z)$ konvergieren, also setzen wir $B(s) \equiv 0$.
Wendet man jetzt die Umkehrformel an, erhält man

$$v(r,z) = \int\limits_0^\infty sA(s)e^{-sz}J_0(sr)ds \tag{4.5}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}(r,z) = -\int\limits_0^\infty s^2A(s)e^{-sz}J_0(sr)ds \ .$$

Für die Randbedingungen von v gilt somit

$$v(r,0) = \int_0^\infty sA(s)J_0(rs)ds = v_0, \qquad 0 \le r < 1 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(r,0) = -\int\limits_0^\infty s^2A(s)J_0(sr)ds = 0, \qquad r > 1 \ . \tag{4.7}$$

Wir benutzen die Einträge (2) und (3) aus Tabelle 5.1 und erhalten

$$\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^\infty s\frac{\sin(s)}{s^2}J_0(sr)ds \quad \text{für } s \le 1 \tag{4.8}$$

$$0 = \int\limits_0^\infty s\frac{\sin(s)}{s}J_0(sr)ds \quad \text{für } s > 1 \ . \tag{4.9}$$

Wir setzen $A(s) = A_0 \cdot \frac{\sin(s)}{s^2}$ mit $A_0 \in \mathbb{R}$ in (4.6) und (4.7) ein und erhalten somit

$$v_0 = A_0 \int\limits_0^\infty \frac{\sin(s)}{s}J_0(sr)ds \quad \text{für } s < 1 \tag{4.10}$$

$$0 = A_0 \int\limits_0^\infty \sin(s)J_0(sr)ds \quad \text{für } s > 1 \ . \tag{4.11}$$

Wenn wir (4.8) in (4.10) einsetzen, sehen wir, dass

$$v_0 = A_0 \cdot \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A_0 = \frac{2v_0}{\pi}$$

und somit

$$A(s) = \frac{2v_0}{\pi}\frac{\sin(s)}{s^2} \ .$$

Setzen wir dies nun in (4.5) ein erhalten wir schließlich die Lösung der Laplace-Gleichung

$$v(r,z) = \frac{2v_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(s)}{s} e^{-sz} J_0(sr) ds \ .$$

4.2 Wärmeleitung

Es werde einer Kreisscheibe in der Ebene $z = 0$ mit Radius $a \in \mathbb{R}$ Wärme mit einer konstanten Rate $Q \in \mathbb{R}$ zugeführt. Dabei sei $K \in \mathbb{R}$ die Leitfähigkeit und $v(r,z)$ die Temperatur, welche wie in Kapitel 4.1 der Laplace-Gleichung (4.2) genügt. Die Randbedingungen sind hier

$$-K\frac{\partial v(r,z)}{\partial z} = Qh(a-r) = \begin{cases} Q, & r < a, \quad z = 0 \\ 0, & r > a, \quad z = 0 \end{cases} \ .$$

Wie in Kapitel 4.1 gilt auch hier

$$V(s,z) = \mathscr{H}_0\{v(r,z)\}$$

und für die Hankel-Transformation der Laplace-Gleichung

$$\mathscr{H}_0\{\nabla^2 v\} = -s^2 V(s,z) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(s,z) = 0 \ .$$

Es gilt also

$$
\begin{aligned}
-K\frac{\partial V}{\partial z}(s,0) &= -K\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{H}_0\{v(r,z)\} \\
&= -K\int\limits_0^\infty r\frac{\partial v}{\partial z}(r,0)J_0(sr)dr \\
&= -K\int\limits_0^\infty r\left(-\frac{Q}{K}h(a-r)\right)J_0(sr)dr \\
&= Q\int\limits_0^\infty rh(a-r)J_0(sr)dr \ .
\end{aligned}
$$

Wir benutzen Eintrag (1) aus Tabelle 5.1 und erhalten

$$-K\frac{\partial V}{\partial z}(s,0) = Qa\frac{J_1(as)}{s} \ .$$

Mit

$$V(s,z) = A(s)e^{-sz} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z}(s,z) = -sA(s)e^{-sz}$$

folgt

$$KsA(s) = Qa\frac{J_1(as)}{s} \Leftrightarrow A(s) = \frac{Q}{K}a\frac{J_1(as)}{s^2} \ .$$

Wir verwenden die Umkehrformel (2.2) und erhalten schließlich die Lösung

$$v(r,z) = \frac{Qa}{K}\int\limits_0^\infty e^{-sz}J_1(as)J_0(sr)s^{-1}ds \ .$$

5 Anhang

5.1 Tabelle für Hankel-Transformationen der Ordnung 0

Hier werden die in den Anwendungen benötigten Hankel-Transformationen aufgeführt (vgl. [3]).

	$f(r)$	$F_0(s) = \mathscr{H}_0\{f(r)\}$
(1)	$h(a-r)$	$\frac{a}{s} J_1(as)$
(2)	$\frac{\sin(r)}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad s<1$ $0, \quad s>1$
(3)	$\frac{\sin(r)}{r^2}$	$\frac{\pi}{2}, \quad s \leq 1$ $\arcsin(\frac{1}{s}), \quad s>1$

Literatur

[1] B. Davies. *Integral Transforms and Their Applications.* Springer-Verlag, New York, 1978.

[2] T. Fliessbach. *Elektrodynamik.* Spektrum Akademischer Verlag, 5 edition, 2008.

[3] R. Piessens. *The Hankel Transform*, chapter 9 - The Hankel-Transform. CRC Press LLC, 2 edition, 2000.

[4] I. Sneddon. *The Use of Integral Transforms.* McGraw-Hill, 1972.

[5] I. Todhunter. *An Elementary Treatise on Laplace's Functions, Lame's Functions and Bessel's Functions.* Macmillan, 1875.

[6] A. Wachter and H. Hoeber. *Repetitorium Theoretische Physik.* Springer-Verlag, 2 edition, 1998 / 2005.