Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Seminararbeit

Fourier-Reihen

vorgelegt von

Stefan Marczinzik

Fachbereich Mathematik und Informatik
Seminar: Integraltransformationen (WS 12/13)
Seminarleiter: Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Abgabedatum: 07.01.2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Seminararbeit gibt einen Überblick über die Grundlagen und das Konvergenzverhalten der sogenannten Fourier-Reihen. Der Grundgedanke dieser speziellen Reihen entstand bereits im 18. Jahrhundert durch den Ingenieur und Mathematiker Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768-1830). Er entwickelte Exponentialreihen, um eine bestimmte partielle Differentialgleichung, die Wärmeleitungsgleichung zu lösen. Diese Reihen sind heute unter dem Begriff Fourier-Reihen bekannt und dienen der Approximation periodischer Funktionen. Die Fouriertheorie ist eines der mathematische Gebiete mit der breitesten Anwendung und vor allem in der modernen Signalverarbeitung aus der heutigen Welt nicht mehr wegzudenken.

2 Grundlagen

2.1 Periodische Funktionen

Definition:
Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit Periode L > 0, falls

$$f(x+L) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nun lässt sich jede L-periodische Funktion mittels Variablentransformation durch eine 2π-periodische Funktion darstellen:

$F(x) := f(\frac{L}{2\pi}x)$ ist 2π-periodisch, falls f L-periodisch war.

Von nun an wird also der Begriff periodisch als Synonym für 2π-periodisch verwendet. Spezielle periodische Funktionen sind die trigonometrischen Polynome:

2.2 Trigonometrische Polynome

Definition:
Ein *trigonometrisches Polynom vom Grad n* ist eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} \qquad , \ x \in \mathbb{R}$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Mithilfe der Euler'schen Formel

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad , \ x \in \mathbb{R}$$

erhält man die folgende alternative Darstellung:

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \qquad , \ x \in \mathbb{R}$$

wobei die Koeffizienten a_k und b_k folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 && \\ a_k &= c_k + c_{-k} && k = 1, ..., n \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) && k = 1, ..., n \end{aligned}$$

In den folgenden Ausführungen wird die Darstellung mit den Koeffizienten c_k verwendet.

3 Fourier-Reihen

Im folgenden wird das Symbol $\mathbb{T}$ als Synomym für ein beliebiges Intervall der Länge 2π (z.B. $[0; 2\pi]$) verwendet. Weiter bezeichne $\mathscr{R}(\mathbb{T})$ den Vektorraum der 2π-periodischen Regelfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$.

Setzt man nun eine Funktion $f \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$ mit einem beliebigen trigonometrischen Polynom gleich, so kann man mit den nachfolgenden Umformungen eine Formel für die sogenannten *Fourier-Koeffizienten* erhalten. Dazu benötigt man zunächst das Integral über Funktionen der Form $\phi(x) = \mathrm{e}^{imx}$, $m \neq 0$. Da diese holomorph sind, gilt:

$$\int_a^b \mathrm{e}^{imx} dx = \left[\frac{1}{im}\mathrm{e}^{imx}\right]_a^b$$

Insbesondere ergibt sich also:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{imx} dx = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \tag{1}$$

Nun kann umgeformt werden:

$$\begin{aligned} && f(x) &= \sum_{l=-n}^{n} c_l \mathrm{e}^{ilx} \\ \Leftrightarrow && f(x)\mathrm{e}^{-ikx} &= \sum_{l=-n}^{n} c_l \mathrm{e}^{i(l-k)x} \\ \Leftrightarrow && \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx} dx &= \sum_{l=-n}^{n} c_l \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(l-k)x} dx \\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} && \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx} dx &= c_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k-k)x} dx}_{2\pi} \\ \Leftrightarrow && c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx} dx \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, ..., \pm n \end{aligned}$$

Definition: (Fourier-Reihe)
Sei $f \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$. Dann heißen die Zahlen

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-ikx} dx \qquad , \; k \in \mathbb{Z}$$

die *Fourier-Koeffizienten* von f und die Reihe

$$\mathfrak{F}[f](x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikx},$$

d.h. die Folge der Partialsummen

$$\mathfrak{F}_n[f](x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} \qquad , \; n \in \mathbb{N}$$

heißt *Fourier-Reihe* von f.

Da die Fourier-Reihen wie eingangs erwähnt der Approximation periodischer Funktionen dienen sollen, wäre es nun wünschenswert, wenn die Fourier-Reihe von f auch gegen f konvergiert. Dazu lässt sich allerdings sagen, dass die Fourier-Reihe von f im Allgemeinen weder gleichmäßig noch punktweise gegen f konvergiert. Da die konventionellen Konvergenzbegriffe für diesen Anwendungsfall nicht zielführend sind, wird ein neuer Konvergenzbegriff eingeführt, die sogenannte *Konvergenz im quadratischen Mittel.* Dazu sind allerdings einige Vorbereitungen notwendig.

4 Konvergenz im quadratischen Mittel

Zunächst wird in dem oben definierten Vektorraum $\mathscr{R}(\mathbb{T})$ folgendes Skalarprodukt eingeführt:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx \qquad \text{wobei } f, g \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$$

Dass hiermit ein Skalarprodukt definiert wird, ist leicht zu zeigen. Dabei sei allerdings erwähnt, dass die Definitheit nicht ohne weiteres erfüllt ist. Das heißt aus $\langle f, f \rangle = 0$ kann i.A. nicht gefolgert werden, dass $f = 0$ gilt. Wenn sich f zum Beispiel von der Nullfunktion auf $[0, 2\pi]$ an nur endlich vielen Stellen unterscheidet, so gilt $\langle f, f \rangle = 0$ obwohl f nicht die Nullfunktion ist. Dies wird dadurch umgangen, dass man jede Funktion, welche sich an nur endlich vielen Stellen von der Nullfunktion unterscheidet, mit der Nullfunktion „identifiziert“.

Die zu dem Skalarprodukt zugehörige Norm wird wie folgt definiert:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle} \qquad \text{mit} \quad \langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \geq 0$$

Für diese Norm gilt insbesondere die Dreiecksungleichung.
Nun folgt ein bekannter Satz, welcher für die folgenden Ausführungen sehr hilfreich sein wird.

Satz: (Besselsche Ungleichung)
Sei $f \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$ eine Funktion mit den Fourier-Koeffizienten c_k. Dann gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Beweis:
Setze $e_k := \mathrm{e}^{ikx}$.
Wegen $\quad \langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ 1 & \text{falls } k = l \end{cases}$
bilden die Funktionen e_k ein Orthonormalsystem.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 &= \left\langle f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \ , \ f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\rangle \\ &\overset{\text{bilinear}}{=} \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} c_k \underbrace{\langle f, e_k\rangle}_{\overline{c_k}} - \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \underbrace{\langle e_k, f\rangle}_{c_k} + \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\rangle \\ &\overset{\text{orthog.}}{=} \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \end{aligned} \tag{$*$}$$

Also

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Mit Grenzübergang folgt die Behauptung. $\square$

Definition: (Konvergenz im quadratischen Mittel)
Sei $f \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$ eine Funktion sowie $f_n \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}$, eine Funktionenfolge. Man sagt (f_n) *konvergiert im quadratischen Mittel* gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$$

d.h. wenn das quadratische Mittel der Abweichung zwischen f und f_n, nämlich

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx$$

für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Bemerkungen:

1. Aus der Definition kann direkt gefolgert werden:
   Gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz im quadr. Mittel.

2. Die Umkehrung der obigen Implikation gilt im Allgemeinen nicht.

3. Aus $(*)$ folgt, dass die Fourier-Reihe einer Funktion f genau dann gegen f konvergiert, falls

   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2$$

   Diese Gleichung bezeichnet man auch als **Vollständigkeitsrelation** oder **Parseval'sche Gleichung**.

Lemma:
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion, sodass $f|_{[0,2\pi]}$ eine Treppenfunktion ist. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f.

ohne Beweis. (siehe [For11])

Satz: (Konvergenz der Fourier-Reihe)
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine periodische Funktion, sodass $f|_{[0,2\pi]}$ Regelfunktion ist. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f und es gilt die Vollständigkeitsrelation.

Beweis:
Man kann oBdA annehmen, dass f reellwertig ist und dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (beachte, dass f Regelfunktion auf einem kompakten Intervall und damit beschränkt ist).
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existieren periodische Funktionen $\phi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\phi|_{[0,2\pi]}$ und $\psi|_{[0,2\pi]}$ sind Treppenfunktionen

2. $-1 \leq \phi \leq f \leq \psi \leq 1$

3. $\int_0^{2\pi}(\psi(x) - \phi(x))dx \leq \frac{\pi}{4}\epsilon^2$

Setze nun $g := f - \phi$. Dann gilt:

$$|g|^2 \leq \underbrace{|\psi - \phi|^2}_{0 \leq \star \leq 2} \leq 2(\psi - \phi)$$

also

$$\|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |g(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\psi(x) - \phi(x)) dx \leq \frac{\epsilon^2}{4} \qquad (**)$$

Mit $f = \phi + g$ (s.o.) gilt für die Partialsummen $\mathfrak{F}_n[f], \mathfrak{F}_n[\phi]$ bzw. $\mathfrak{F}_n[g]$ der Fourier-Reihen von f, ϕ bzw. g:

$$\mathfrak{F}_n[f] = \mathfrak{F}_n[\phi] + \mathfrak{F}_n[g].$$

Nach obigem Lemma gibt es ein N, sodass

$$\|\phi - \mathfrak{F}_n[\phi]\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\, n \geq N.$$

Weiter kann mit $(*)$ aus dem Beweis der Besselschen Ungleichung folgende Abschätzung gemacht werden (c_k seien die Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe von g):

$$\|g - \mathfrak{F}_n[g]\|_2^2 \overset{(*)}{=} \|g\|_2^2 + \sum_{k=-n}^{n} \|c_k\|^2 \leq \|g\|_2^2 \overset{(**)}{\leq} \frac{\epsilon^2}{4}$$

Insgesamt gilt damit für alle $n \geq N$:

$$\|f - \mathfrak{F}_n[f]\|_2 \overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} \|\phi - \mathfrak{F}_n[\phi]\|_2 + \|g - \mathfrak{F}_n[g]\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Damit folgt die Behauptung. Außerdem gilt hiermit nach obiger Bemerkung die Vollständigkeitsrelation.

□

Mit diesen Erkenntnissen und mit der Einführung des neuen Konvergenzbegriffes soll an dieser Stelle ein alternativer Ansatz zur Herleitung der Fourierkoeffizienten vorgestellt werden. Dazu kann man die Aufgabe folgendermaßen formulieren: Finde zu einer Funktion das trigonometrische Polynom, welches ebendiese Funktion am besten approximiert im Sinne des quadratischen Mittels. Dazu sei $f \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$ und p ein trigonometrisches Polynom vom Grad n sowie $e_k = \mathrm{e}^{ikx}$ wie oben, also

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \, .$$

Nun betrachte man den Abstand der Funktion f zu diesem beliebigen trigonometrischen Polynom im Sinne der oben definierten Norm und nutze wiederum die Orthogonalität der Funktionen e_k aus:

$$\begin{aligned}
\|f-p\|_2^2 &= \langle f-p, f-p\rangle \\
&\overset{\text{bilinear}}{=} \langle f,f\rangle - \langle f,p\rangle - \langle p,f\rangle + \langle p,p\rangle \\
&= \langle f,f\rangle - \langle f,p\rangle - \overline{\langle f,p\rangle} + \langle p,p\rangle \\
&= \langle f,f\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f,p\rangle + \langle p,p\rangle \\
&= \langle f,f\rangle - 2\,\mathrm{Re}\left\langle f, \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\right\rangle + \left\langle \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k, \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\right\rangle \\
&\overset{\text{orthog.}}{=} \langle f,f\rangle - 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\,\langle f,e_k\rangle\right) + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2
\end{aligned}$$

Weiter kann folgende Gleichheit verwendet werden:

$$\begin{aligned}
|c_k - \langle f,e_k\rangle|^2 &= (c_k - \langle f,e_k\rangle)\overline{(c_k - \langle f,e_k\rangle)} \\
&= |c_k|^2 - c_k\overline{\langle f,e_k\rangle} - \overline{c_k}\,\langle f,e_k\rangle + |\langle f,e_k\rangle|^2 \\
&= |c_k|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{c_k}\,\langle f,e_k\rangle) + |\langle f,e_k\rangle|^2
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\|f-p\|_2^2 = \langle f,f\rangle - \sum_{k=-n}^{n} |\langle f,e_k\rangle|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k - \langle f,e_k\rangle|^2$$

Nun kann man erkennen, dass die beiden ersten Terme nicht von dem trigonometrischen Polynom p abhängen. Einzig und allein der dritte Term hängt von p ab. Dieser kann als Summe von Quadraten nicht negativ werden. Minimiert wird der gesamte Ausdruck also, falls für $k = -n, ..., n$ gilt:

$$\begin{aligned}
c_k &= \langle f,e_k\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}dx
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten entsprechen also genau denen der Fourier-Reihe von f, wie sie bereits oben definiert wurde.

5 Fourier-Reihe der Ableitung

Hat man einmal die Fourier-Reihe zu einer Funktion bestimmt, so kann man mithilfe der Fourier-Koeffizienten der Funktion leicht die Fourier-Koeffizienten der jeweiligen Ableitung bestimmen, wie folgende Rechnung zeigt:

Sei $f \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$ Stammfunktion zu $\phi \in \mathscr{R}(\mathbb{T})$. Dann gilt ($c'_k$ und c_k seien die Fourier-Koeffizienten von ϕ bzw. f):

$$\begin{aligned}
c'_k &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \phi(x) \mathrm{e}^{-ikx} dx \\
&\overset{\text{partielle}}{\underset{\text{Integration}}{=}} \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\left[f(x) \mathrm{e}^{-ikx} \right]_0^{2\pi}}_{= 0 \text{ (Periodizität von f)}} + ik \int\limits_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-ikx} dx \right) \\
&= ik \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-ikx} dx \\
&= ik \cdot c_k
\end{aligned}$$

Die Fourier-Koeffizienten von ϕ erhält man also aus den Fourier-Koeffizienten von f durch gliedweises Differenzieren.

6 Anwendungsbeispiel

Man betrachte die periodische Fortsetzung der Funktion $\sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\sigma(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 < x < 2\pi$ und $\sigma(0) = 0$. Zunächst werden die Fourier-Koeffizienten berechnet:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sigma(x) dx = 0$$

Für $k \neq 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \mathrm{e}^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \pi \mathrm{e}^{-ikx}}_{= 0 \; (s.o.)} - \int\limits_0^{2\pi} x \mathrm{e}^{-ikx} dx \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \mathrm{e}^{-ikx} dx
\end{aligned}$$

$$\underset{\text{Integration}}{\overset{\text{partielle}}{=}} \quad -\frac{1}{4\pi ik}\left(\left[x\mathrm{e}^{-ikx}\right]_0^{2\pi} - \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ikx}dx}_{=0}\right) = \frac{1}{2ik}$$

Für die Fourier-Reihe von σ folgt damit:

$$\mathfrak{F}[\sigma] = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2ik}\mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{k} - \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Die folgende Abbildung zeigt einige Partialsummen der Fourier-Reihe zur Funktion σ. Offensichtlich wird die Approximation mit größer werdendem n besser.

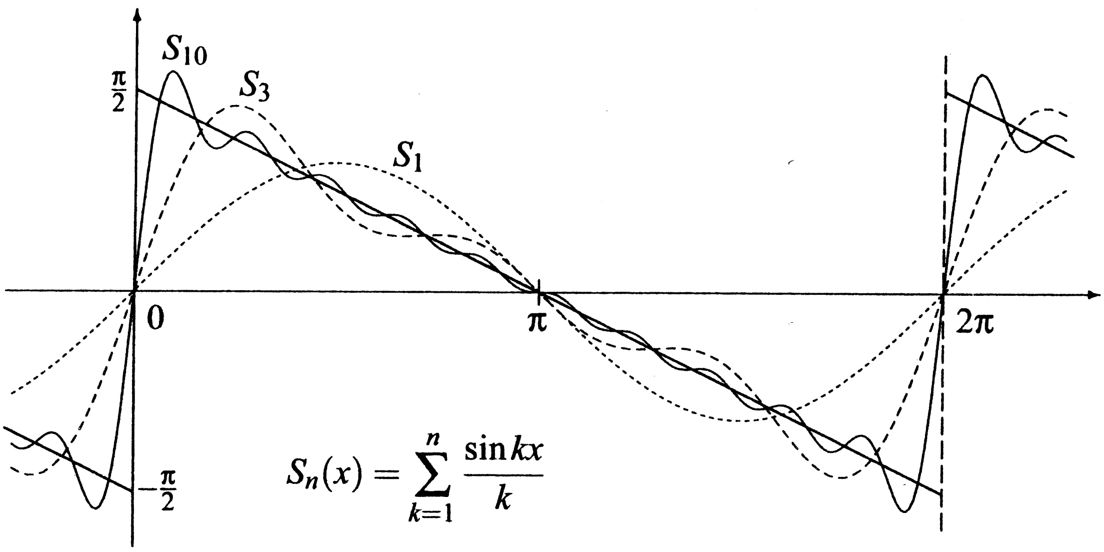

Abbildung 1: Partialsummen der Fourier-Reihe zur Funktion σ

Nach obigem Satz konvergiert die ermittelte Reihe im quadratischen Mittel gegen σ und die Vollständigkeitsrelation (VR) liefert:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} \\
&\overset{\text{VR}}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{\pi - x}{2}\right|^2 dx \\
&= \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\pi^2 - 2\pi x + x^2)dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left[\pi^2 x - \pi x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{12}$$

Es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Man sieht also, dass sich mithilfe der Fourier-Reihen und deren Konvergenz auch Reihenwerte berechnen lassen.

7 Literaturverzeichnis

[For11] Forster, Otto (2011): Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. 10. Auflage, Wiesbaden.

[Kön04] Königsberger, Konrad (2004): Analysis 1. 6. Auflage, Berlin.

[Are10] Arens, Tilo et al. (2010): Mathematik. 2. Auflage, Heidelberg.

[For10] Forster, Brigitte (2010): Fourier- und Laplace-Transformation. Vorlesungsskript TU München. URL: http://www.gm.fh-koeln.de/ afomusoe/SS2012/Mathe/fourier-laplace_Skript.pdf (letzter Zugriff: 04.01.2013).