Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 11/12**
Dr. T. Timmermann

Übung zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 08.12.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 8

Aufgabe 1. Prüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n} \quad (a>0)$, (b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Aufgabe 2. Berechne die folgenden Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{(3+4\mathrm{i})^n}{\left(\sqrt{11+|3+4\mathrm{i}|^2}\right)^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} \quad (0 \leq a < b \text{ und } b-a \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 3. Berechne die folgenden Reihen unter Verwendung der Gleichung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

Aufgabe 4. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen positiver Zahlen, die *asymptotisch gleich* sind in dem Sinn, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(a) Zeige: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq 2\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=N}^{\infty} b_n \leq 2\sum_{n=N}^{\infty} a_n$.

(b) Zeige: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

(c) Prüfe, für welche $s \in \mathbb{Q}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^s}} - 1\right)$ konvergiert.

Aufgabe N. (4 Zusatzpunkte) Zeichne einen Nikolaus unter ausschließlicher Verwendung von Ziffern, griechischen Buchstaben und mathematischen Symbolen.