Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 11/12**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 10.11.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Die Normalform einer kubischen Gleichung ist $z^3 + pz + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$.

(a) Rechne nach, dass für $D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ die Lösungen dieser kubischen Gleichung gegeben sind durch die Cardanischen Formeln

$$z_1 = u + v\,, \qquad z_2 = \Big(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)u + \Big(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)v,$$
$$z_3 = \Big(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)u + \Big(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)v$$

mit

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\,, \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}\,.$$

Dabei ist $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{-a}$ für $a < 0$.

(b) Bestimme die Lösungen von $z^3 + 6z + 2 = 0$.

Aufgabe 2. Bestimme für die folgenden Mengen, falls vorhanden, jeweils das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum:

(a) $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \;:\; n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$, (b) $\left\{2^{(-1)^n n} \;:\; n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$.

Aufgabe 3. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem:

$$ax + by = e, \qquad cx + dy = f. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass (1) im Fall $ad \neq bc$ die folgende eindeutige Lösung besitzt:

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

(b) Sei $ad = bc$. Welche Bedingung muss zusätzlich erfüllt sein, damit für jedes x genau ein y existiert, für welches $(x, y(x))$ das System (1) löst?

Finde die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme (ggf. in der Form $(x, y(x))$):

(c) $$\begin{aligned} 2x + 5y &= 8, \\ 3x - 2y &= -7, \end{aligned}$$ (d) $$\begin{aligned} x - 3y &= 4, \\ -2x + 6y &= 8. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4. Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -4, \\ 5x + 11y - 21z &= -22, \\ 3x - 2y + 3z &= 11, \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10, \\ 3x + 2y + 2z &= 1, \\ 5x + 4y + 3z &= 4. \end{aligned}$$