Konforme Killing-Vektorfelder

Seminarvortrag von
Steffen Tillmann
25.10.2011

1 Erinnerung und Notation

Im letzten Vortrag haben wir gesehen:
Das Paar $(\mathbb{R}^{n,m}, g)$ mit

$$g = (g_{\mu,\nu}) = \text{diag}(\underbrace{1, ..., 1}_{n-mal}, \underbrace{-1, ..., -1}_{m-mal})$$

ist eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit.
Die Transformation $K : \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}^{n,m}$ ist konform genau dann, wenn die Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \sum_{\mu,\nu} g_{\mu,\nu} \frac{\partial (K(x))_\mu}{\partial x_\sigma} \frac{\partial (K(x))_\nu}{\partial x_p} = \Omega^2(x) g_{\sigma,p}$$

für eine C^∞-Funktion $\sigma : \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}^+$ erfüllt ist.
In diesem Vortrag werden wir folgende Notation benutzen: Für einen Vektor $X = (X_\mu)$ setzen wir:

$$\widetilde{X}_\mu := \sum_\nu g_{\mu,\nu} X_\nu (= g_{\mu,\mu} X_\mu)$$

2 Killing-Vektorfelder und Killing-Faktoren

Im Folgenden wollen wir konforme Abbildungen $\varphi : M_1 \to M_2$ zwischen offenen Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^{m,n}$, $m + n = d > 1$, studieren. Zunächst werden wir diese wie folgt klassifizieren:
Sei $X : M \to \mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^{m,n}$ ein glattes Vektorfeld. (Vektorfelder sind Abbildungen, die jedem Punkt einen (Richtungs-)Vektor zuordnen.) Sei nun weiter $\gamma = \gamma(t)$ eine glatte Kurve in M. Dann bilden wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = X(\gamma)$$

Wir wenden nun den Hauptsatz der gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe [3]) an, der die Existenz einer Lösung impliziert.

2.1 Satz

Seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und d, X, M wie oben, dann existiert ein Intervall $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, $V \subseteq M$ offen und eine Funktion $\Gamma : I \times V \to M$, so dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, a) = X(\Gamma(t, a))$$

und $\Gamma(t_0, a) = a$. (Bemerkung: Wählen wir I und V maximal, so ist Γ sogar eindeutig.)

2.2 Einparametrige Transformationsgruppe

Sei also $\varphi^X(\cdot, a) : (t_a^-, t_a^+) \to M$ die Funktion, die die obere Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $\varphi^X(0, a) = a$ erfüllt (auf dem maximalen Intervall (t_a^-, t_a^+)).
Setze $M_t := \{a \in m : t_a^- < t < t_a^+\}$ und $\varphi_t^X(a) := \varphi^X(t, a)$ für $a \in M_t$. Dann ist M_t eine offene Teilmenge von M und $(\varphi_t^X)_{t\in\mathbb{R}}$ "verhält sich wie eine Gruppe". Genauer:
Es gilt $\varphi_t^X \circ \varphi_s^X(a) = \varphi_{t+s}^X(a)$ für $a \in M_{t+s} \cap M_s$ und $\varphi_s^X(a) \in M_t$ und $\varphi_0^X = \mathrm{id}_M$ $(M_0 = M)$. Insbesondere ist die Strömungsgleichung

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^X)_{t=0} = X$$

erfüllt. $(\varphi_t^X)_{t\in\mathbb{R}}$ heißt die einparametrige Transformationsgruppe.
(Für Beweise siehe [3])

2.3 Definition

Ein Vektorfeld X auf $M \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ heißt konformes Killing-Feld, wenn φ_t^X in einer Umgebung von 0 für alle t konform ist.

2.4 Satz

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ offen, $g = (g_{\mu,\nu}) \in M_{m+n}(\mathbb{R})$ wie oben und X ein konformes Killing-Feld mit Koordinaten

$$X = (X_1, ..., X_d)$$

Dann existiert eine glatte Funktion $\chi : M \to \mathbb{R}$ mit

$$\partial_\nu \widetilde{X}_\mu + \partial_\mu \widetilde{X}_\nu = \chi g_{\mu,\nu}$$

<u>Beweis</u>:
Seien X und $(\varphi_t^X)_{t\in\mathbb{R}}$ wie im Satz und $\Omega_t : M_t \to \mathbb{R}^+$ der konforme Faktor für φ_t^X. Dann gilt nach 1.1:

$$\sum_{i,j} g_{i,j} \partial_\mu(\varphi_t^X(a))_i \partial_\nu(\varphi_t^X(a))_j = \Omega_t^2(a) g_{\mu,\nu}$$

Differenzieren nach t an der Stelle t=0 liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\Omega_t^2(a)g_{\mu,\nu})_{t=0} &= \frac{d}{dt}(\sum_{i,j} g_{i,j}\partial_\mu(\varphi_t^X(a))_i\partial_\nu(\varphi_t^X(a))_j)_{t=0} \\
&= \sum_{i,j} g_{i,j}\left(\partial_\mu(\frac{d}{dt}\varphi_0^X(a))_i\partial_\nu(\varphi_0^X(a))_j + \partial_\mu(\varphi_0^X(a))_i\partial_\nu(\frac{d}{dt}\varphi_0^X(a))_j\right) \\
&\overset{\frac{d}{dt}\varphi_0^X = X, \varphi_0^X = id_M}{=} \sum_{i,j} g_{i,j}\left(\partial_\mu X_i(a)\delta_{\nu,j} + \delta_{\mu,i}\partial_\nu X_j(a)\right) \\
&= \sum_i g_{i,\nu}\partial_\mu X_i(a) + \sum_j g_{\mu,j}\partial_\nu X_j(a) \\
&= \partial_\mu \widetilde{X}_i(a) + \partial_\nu \widetilde{X}_j(a)
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $\chi(a) := \frac{d}{dt}\Omega_t^2(a)_{t=0}$, so folgt die Behauptung.

□

2.5 Definition

Eine glatte Funktion $\chi : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^{m,n}$, heißt konformer Killing-Faktor, falls ein konformes Killing-Feld X existiert mit

$$\partial_\nu \widetilde{X}_\mu + \partial_\mu \widetilde{X}_\nu = \chi g_{\mu,\nu} \tag{2}$$

2.6 Satz

Eine glatte Funktion $\chi : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^{m,n}$, ist ein konformer Killing-Faktor genau dann, wenn die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$(d-2)\partial_\mu\partial_\nu\chi + g_{\mu,\nu}\Delta_g\chi = 0 \ ,$$

wobei $\Delta_g = \sum_{k,l} g_{k,l}\partial_k\partial_l = \sum_\sigma g_{\sigma,\sigma}\partial_\sigma^2$ der Laplace-Beltrami Operator für g ist.

Beweis:

Sei $\chi : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^{m,n}$, ein konformer Killing-Faktor, dann gilt per Definition Gleichung (2).

Weiterhin folgt aus $\partial_k\partial_l\partial_\nu\widetilde{X}_\mu = \partial_\nu\partial_k\partial_l\widetilde{X}_\mu$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_k\partial_l(\partial_\nu\widetilde{X}_\mu + \partial_\mu\widetilde{X}_\nu) - \partial_l\partial_k(\partial_\nu\widetilde{X}_k + \partial_k\widetilde{X}_\nu) \\
&\quad + \partial_\mu\partial_\nu(\partial_l\widetilde{X}_k + \partial_k\widetilde{X}_l) - \partial_\nu\partial_k(\partial_l\widetilde{X}_\mu + \partial_\mu\widetilde{X}_l) \\
&\overset{(2)}{=} \partial_k\partial_l\ \chi\ g_{\mu,\nu} - \partial_l\partial_k\ \chi\ g_{k,\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\ \chi\ g_{l,k} - \partial_\nu\partial_k\ \chi\ g_{\mu,l}
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die Gleichung nun mit $g_{k,l}$ und summieren über l und k. Dann erhalten wir (beachte: $\sum_\lambda g_{\mu,\lambda} g_{\lambda,\nu} = \delta_{\mu,\nu}$ und $\sum_{k,l} g_{k,l}^2 = \sum_k g_{k,k}^2 = d$):

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k,l} g_{k,l}\, g_{\mu,\nu}\, \partial_k \partial_l\, \chi - \sum_{k,l} g_{k,l}\, g_{k,\nu}\, \partial_l \partial_k\, \chi \\
&\quad + \sum_{k,l} g_{k,l}^2\, \partial_\mu \partial_\nu\, \chi - \sum_{k,l} g_{k,l}\, g_{\mu,l}\, \partial_\nu \partial_k\, \chi \\
&= g_{\mu,\nu} \underbrace{\sum_{k,l} g_{k,l}\ \ \partial_k \partial_l}_{=\Delta_g}\ \chi - \underbrace{\sum_{l} \delta_{l,\nu}\, \partial_l \partial_k}_{=\partial_\nu \partial_\mu}\ \chi \\
&\quad + d\, \partial_\mu \partial_\nu\, \chi - \underbrace{\sum_{k} \delta_{k,\mu}\, \partial_\nu \partial_k}_{=\partial_\nu \partial_\mu}\ \chi \\
&= g_{\mu,\nu} \Delta_g \chi + (d-2) \partial_\mu \partial_\nu \chi
\end{aligned}$$

Die Rückrichtung des Beweises folgt aus den Rechnungen im nächsten Abschnitt und im nächsten Vortrag.

□

2.7 Bemerkung

Aus Satz 2.6 folgt im Fall $d = 2$:
χ ist konformer Killing-Faktor $\iff$ $\Delta_g \chi = 0$
Im Fall $d > 2$ ist χ ein konformer Killing-Faktor genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Ist $\mu \neq \nu$, so folgt $\partial_\mu \partial_\nu \chi = 0$ (weil dann $g_{\mu,\nu} = 0$)

(ii) $\partial_\mu \partial_\mu \chi = g_{\mu,\mu} (d-2)^{-1} \Delta_g \chi$

3 Infinitesimale, konforme Transformation

3.1 Definition

Eine infinitesimale Transformation $i : M_1 \to M_2$ mit $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n,m}$ (zu niedrigster Ordnung) ist definiert durch die Zuordnung

$$x_\sigma \mapsto i(x)_\sigma = x_\sigma + \delta x_\sigma = x_\sigma + \epsilon \omega_\sigma(x) + O(\epsilon^2)$$

3.2 Lemma

Eine infinitesimale Transformation $i : M_1 \to M_2$ mit $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n,m}$ ist genau dann konform (mit konformen Faktor $\Omega(x)$), wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}_p(x)}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \widetilde{\omega}_\sigma(x)}{\partial x_p} = \chi(x) g_{\sigma,p} \tag{3}$$

Dabei ist die Funktion χ durch den Ansatz $\Omega^2(x) = 1 + \epsilon\chi(x) + O(\epsilon^2)$ definiert.

Bemerkung: Wir sehen, dass die Gleichungen (2) und (3) übereinstimmen. Dennoch wollen wir die Gleichung hier neu nummerieren, um deutlich auf die verschiedenen Herleitung der Gleichung hinzuweisen.

Beweis:

Die Bedinung (1) liefert mithilfe des Ansatzes $\Omega^2(x) = 1 + \epsilon\chi(x) + O(\epsilon^2)$ die Gleichung

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu,\nu} \frac{\partial i_\mu(x)}{\partial x_\sigma} \frac{\partial i_\nu(x)}{\partial x_p} = g_{\sigma,p} + \epsilon\chi(x) g_{\sigma,p} + O(\epsilon^2)$$

Wegen $\frac{\partial i_\mu(x)}{\partial x_\sigma} = \delta_{\mu,\sigma} + \epsilon \frac{\partial \omega_\mu(x)}{\partial x_\sigma} + O(\epsilon^2)$ folgt

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu,\nu} \left(\delta_{\mu,\sigma} + \epsilon \frac{\partial \omega_\mu(x)}{\partial x_\sigma} + O(\epsilon^2) \right) \left(\delta_{\nu,p} + \epsilon \frac{\partial \omega_\nu(x)}{\partial x_p} + O(\epsilon^2) \right) = g_{\sigma,p} + \epsilon\chi(x) g_{\sigma,p} + O(\epsilon^2)$$

Multiplizieren wir die linke Seite der Gleichung aus, folgt

$$g_{\sigma,p} + \epsilon \sum_\mu g_{\mu,p} \frac{\partial \omega_\mu(x)}{\partial x_\sigma} + \epsilon \sum_\nu g_{\sigma,\nu} \frac{\partial \omega_\nu(x)}{\partial x_p} + O(\epsilon^2) = g_{\sigma,p} + \epsilon\chi(x) g_{\sigma,p} + O(\epsilon^2)$$

Vernachlässigen wir die $O(\epsilon^2) - Terme$, erhalten wir äquivalent

$$\sum_\mu g_{\mu,p} \frac{\partial \omega_\mu(x)}{\partial x_\sigma} + \sum_\nu g_{\sigma,\nu} \frac{\partial \omega_\nu(x)}{\partial x_p} = \chi(x) g_{\sigma,p}$$

□

3.3 Satz

Folgende Transformationen erfüllen die Bedingung (2) und können somit als infinitesimale Transformationen aufgefasst werden:

(i) Translation (mit $\chi(x) = 0$)

(ii) Rotation (mit $\chi(x) = 0$)

(iii) Dilatation (mit $\chi(x) = 2\kappa$, $\kappa = \text{const.}$)

(iv) spezielle konforme Transformation (mit $\chi(x) = -4(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})$)

Beweis:

(i) Wir können Translationen $T : \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}^{n,m}$ für infinitesimale Änderungen wie folgt entwickeln:

$$T(x_\sigma) = x_\sigma + a_\sigma = x_\sigma + \epsilon c_\sigma + O(\epsilon^2)$$

Dann folgt $\omega_\sigma(x) = c_\sigma$ und somit $\frac{\partial \omega_\sigma(x)}{\partial x_\mu} = 0$. Wir sehen sofort, dass die Gleichung (2) für $\chi(x) = 0$ erfüllt ist.

(ii) Eine Rotation $R : \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}^{n,m}$ (mit Rotationsmatrix $(R_{\sigma,p})$) entwickeln wir durch

$$R(x_\sigma) = \sum_p R_{\sigma,p} x_p = x_\sigma + \epsilon \sum_p m_{\sigma,p} x_p + O(\epsilon^2)$$

Dabei haben wir naheliegenderweise den Ansatz $R_{\sigma,p} = \delta_{\sigma,p} + \epsilon m_{\sigma,p} + O(\epsilon^2)$ gewählt.
Damit folgt $\omega_\sigma(x) = \sum_p m_{\sigma,p} x_p$ und deshalb $\frac{\partial \omega_\sigma(x)}{\partial x_\mu} = m_{\sigma,p}$. Nun können wir nachrechnen:

$$\sum_\mu g_{\mu,p} \frac{\partial \omega_\mu(x)}{\partial x_\sigma} + \sum_\nu g_{\sigma,\nu} \frac{\partial \omega_\nu(x)}{\partial x_p} = \sum_\mu g_{\mu,p} m_{\mu,\sigma} + \sum_\nu g_{\sigma,\nu} m_{\nu,p}$$

Wir wollen zeigen, dass die rechte Seite der Gleichung gleich Null ist. (Dann erhalten wir die Gleichung (2) mit $\chi(x) = 0$.) Dazu betrachten wir die Rotationsmatrix R, die nach Annahme die folgende Gleichung erfüllt:

$$\sum_{\mu,\nu} R_{\mu,\sigma} g_{\mu,\nu} R_{\nu,p} = g_{\sigma,p}$$

Vernachlässigen wir die $O(\epsilon^2)$-Terme folgt

$$\sum_{\mu,\nu} (\delta_{\mu,\sigma} + \epsilon m_{\mu,\sigma}) g_{\mu,\nu} (\delta_{\nu,p} + \epsilon m_{\nu,p}) = g_{\sigma,p}$$

Ausmultiplizieren liefert

$$g_{\sigma,p} + \epsilon \sum_\mu g_{\mu,p} m_{\mu,\sigma} + \epsilon \sum_\nu g_{\sigma,\nu} m_{\nu,p} + O(\epsilon^2) = g_{\sigma,p}$$

Schließlich erhalten wir

$$\sum_\mu g_{\mu,p} m_{\mu,\sigma} + \sum_\nu g_{\sigma,\nu} m_{\nu,p} = 0$$

Beachte: Hier erhalten wir außerdem noch ein wichtiges Kriterium für die Matrix $(m_{\mu,\nu})$, nämlich:

$$\widetilde{m}_{p,\sigma} + \widetilde{m}_{\sigma,p} = 0$$

(iii) Für Dilatation $D : \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}^{n,m}$ haben wir

$$D(x_\sigma) = \lambda x_\sigma = x_\sigma + \epsilon\kappa x_\sigma + O(\epsilon^2),$$

wobei wir den Ansatz $\lambda = 1 + \epsilon\kappa + O(\epsilon^2)$ verwendet haben. Dann folgt $\omega_\sigma(x) = \kappa x_\sigma$ und wir erhalten

$$\sum_\mu g_{\mu,p} \frac{\partial \omega_\mu(x)}{\partial x_\sigma} + \sum_\nu g_{\sigma,\nu} \frac{\partial \omega_\nu(x)}{\partial x_p} = \kappa g_{\sigma,p} + \kappa g_{\sigma,p} = 2\kappa g_{\sigma,p}$$

Offensichtlich ist mit $\chi(x) = 2\kappa$ Gleichung (2) erfüllt.

(iv) Für spezielle konforme Transformation $S : \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}^{n,m}$ haben wir mit dem Ansatz $a_\sigma = \epsilon b_\sigma + O(\epsilon^2)$:

$$\begin{aligned} S(x_\sigma) &= \frac{x_\sigma + a_\sigma \mathbf{x}^2}{1 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{a}^2\mathbf{x}^2} \\ &\overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} \frac{(1 + \epsilon 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\left(x_\sigma + \epsilon b_\sigma \mathbf{x}^2 - \epsilon 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})x_\sigma\right)}{1 + \epsilon 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{x} + O(\epsilon^2)} + O(\epsilon^2) \\ &\overset{O(\epsilon^2)\text{ vernachlässigen}}{=} x_\sigma + \epsilon\left(b_\sigma \mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})x_\sigma\right) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Deshalb ist $\omega_\sigma(x) = b_\sigma \mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})x_\sigma$ und

$$\frac{\partial \omega_\sigma(x)}{\partial x_\mu} = 2b_\sigma g_{\mu,\mu} x_\mu - 2b_\mu g_{\mu,\mu} x_\sigma - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\delta_{\sigma,\mu}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sum_\mu g_{\mu,p} \frac{\partial \omega_\mu(x)}{\partial x_\sigma} + \sum_\nu g_{\sigma,\nu} \frac{\partial \omega_\nu(x)}{\partial x_p} \\ &\qquad = \sum_\mu g_{\mu,p} \left(2b_\mu g_{\sigma,\sigma} x_\sigma - 2b_\sigma g_{\sigma,\sigma} x_\mu - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\delta_{\mu,\sigma}\right) \\ &\qquad\quad + \sum_\nu g_{\sigma,\nu} \left(2b_\nu g_{p,p} x_p - 2b_p g_{p,p} x_\nu - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})\delta_{p,\nu}\right) \\ &\qquad = g_{p,p} 2b_p g_{\sigma,\sigma} x_\sigma - g_{p,p} 2b_\sigma g_{\sigma,\sigma} x_p - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}) g_{p,\sigma} \\ &\qquad\quad + g_{\sigma,\sigma} 2b_\sigma g_{p,p} x_p - g_{\sigma,\sigma} 2b_p g_{p,p} x_\sigma - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}) g_{p,\sigma} \\ &\qquad = -4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}) g_{p,\sigma} \end{aligned}$$

Daher ist Gleichung (2) mit $\chi(x) = -4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})$ erfüllt.

□

3.4 Bemerkung + Definition

Im vorangegangen Satz haben wir vier Beispiele für infinitesimale Transformationen kennengelernt. Diese können wir zu einer weiteren infinitesimalen Transformation kombinieren: Wir definieren $(T+R+D+S) : M_1 \to M_2$, $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n,m}$, durch $(T+R+D+S)(x_\sigma) = T(x_\sigma)+R(x_\sigma)+D(x_\sigma)+S(x_\sigma)$. Dann gilt

$$\omega_\sigma(x) = c_\sigma + \sum_p m_{\sigma,p} x_p + \kappa x_\sigma + b_\sigma \mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})x_\sigma$$

Damit folgt (vgl. mit den Rechnungen im Beweis von Satz 3.3)

$$\frac{\partial\widetilde{\omega}_p(x)}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial\widetilde{\omega}_\sigma(x)}{\partial x_p} = 2\kappa g_{\sigma,p} - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})g_{p,\sigma} = (2\kappa - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}))\, g_{\sigma,p}$$

Das heißt, dass mit $\chi(x) = 2\kappa - 4(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})$ Gleichung (3) erfüllt wird.

3.5 Satz

Sei $d = m + n > 2$, dann ist $(T+R+D+S)$ bereits die allgemeinste Form einer infinitesimalen, konformen Transformation.
Beweis:
Für eine beliebig gegebene infinitesimale Transformation ist nach Lemma 3.2 die Gleichung (3) erfüllt:

$$\partial_\sigma\widetilde{\omega}_p + \partial_p\widetilde{\omega}_\sigma = \chi\, g_{\sigma,p}$$

(Wir müssen zeigen, dass ω_σ wie in Bemerkung 3.4 ist.)
Multiplizieren wir die Gleichung (3) mit $g_{\sigma,p}$ und addieren beide Seiten über alle σ und p, erhalten wir

$$\sum_{p,\sigma} g_{\sigma,p}\, \partial_\sigma\widetilde{\omega}_p + \sum_{p,\sigma} g_{\sigma,p}\, \partial_p\widetilde{\omega}_\sigma = \sum_{p,\sigma} g^2_{\sigma,p}\, \chi$$

Da $\sum_{p,\sigma} g^2_{\sigma,p} = \sum_\sigma g^2_{\sigma,\sigma} = d$ folgt:

(4) $$2(\partial\cdot\widetilde{\omega}) = d\,\chi$$

Einsetzen in Gleichung (3) liefert

$$\partial_\sigma\widetilde{\omega}_p + \partial_p\widetilde{\omega}_\sigma = \frac{2}{d}(\partial\cdot\widetilde{\omega})g_{\sigma,p}$$

Als nächstes leiten wir Gleichung (3) partiell in Richtung τ ab und erhalten

$$\partial_\tau\partial_\sigma\widetilde{\omega}_p + \partial_\tau\partial_p\widetilde{\omega}_\sigma = \partial_\tau\chi\, g_{\sigma,p}$$

Wir vertauschen τ und p:

$$\partial_p \partial_\sigma \widetilde{\omega}_\tau + \partial_p \partial_\tau \widetilde{\omega}_\sigma = \partial_p \chi \; g_{\sigma,\tau}$$

Addieren der beiden Gleichungen liefert

$$(5) \qquad 2\,\partial_p \partial_\tau \widetilde{\omega}_\sigma = \partial_\tau \chi \; g_{\sigma,p} + \partial_p \chi \; g_{\sigma,\tau} - \partial_\sigma(\partial_\tau \widetilde{\omega}_p + \partial_p \widetilde{\omega}_\tau)$$

$$\stackrel{(3)}{=} \partial_\tau \chi \; g_{\sigma,p} + \partial_p \chi \; g_{\sigma,\tau} - \partial_\sigma \chi \; g_{\tau,p}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $g_{p,\tau}$ und addieren über alle p und τ liefert

$$2 \sum_{p,\tau} \partial_p g_{p,\tau} \partial_\tau \widetilde{\omega}_\sigma = \sum_{p,\tau} \partial_\tau \chi \; g_{\sigma,p} g_{p,\tau} + \sum_{p,\tau} \partial_p \chi \; g_{\sigma,\tau} g_{p,\tau} - \partial_\sigma \chi \; \sum_{p,\tau} g_{\tau,p}^2$$

Damit erhalten wir (beachte: $\sum_{p,\tau} g_{\tau,p}^2 = d$ wie oben)

$$(6) \qquad 2\,\partial^2 \widetilde{\omega}_\sigma = \sum_{\tau} \partial_\tau \chi \; \delta_{\sigma,\tau} + \sum_{p,} \partial_p \chi \; g_{\sigma,p} - d\,\partial_\sigma \chi$$

$$= (2-d) \partial_\sigma \chi$$

Partielles Ableiten von (6) in Richtung σ und summieren über alle σ liefert

$$2\,\partial^2 (\partial \cdot \widetilde{\omega}) = (2-d) \partial^2 \chi$$

Mit Gleichung (3) folgt

$$\partial^2 \chi = (2-d) \partial^2 \chi \implies (d-1) \partial^2 \chi = 0 \stackrel{d>2}{\implies} \partial^2 \chi = 0$$

Als nächstes leiten wir Gleichung (6) partiell in Richtung p ab:

$$(2-d) \partial_\sigma \partial_p \chi = 2\,\partial^2 \partial_p \widetilde{\omega}_\sigma$$

Vertauschen von σ und p liefert

$$(2-d) \partial_\sigma \partial_p \chi = 2\,\partial^2 \partial_\sigma \widetilde{\omega}_p$$

Durch Addieren der beiden Gleichungen (und multiplizien mit $\frac{1}{2}$) erhalten wir

$$(2-d) \partial_\sigma \partial_p \chi = \partial^2 (\partial_\sigma \widetilde{\omega}_p + \partial_p \widetilde{\omega}_\sigma) \stackrel{(3)}{=} g_{\sigma,p}\,\partial^2 \chi = g_{\sigma,p} \cdot 0 = 0$$

$$\stackrel{d>2}{\implies} \quad \partial_\sigma \partial_p \chi = 0$$

Deshalb ist χ von der Form $\chi(x) = C + \sum_\sigma B_\sigma x_\sigma$ mit C und B_σ für alle σ konstant, o.B.d.A. können wir (durch geeignete Wahl von $\kappa = \text{const.}$ und $b \in \mathbb{R}^{m,n}$) annehmen:

$$\chi(x) = 2\kappa - 4(b \cdot x)$$

Einsetzen in (5) liefert

$$2\, \partial_p \partial_\tau \widetilde{\omega}_\sigma = -4\widetilde{b}_\tau g_{\sigma,p} - 4\widetilde{b}_p g_{\sigma,\tau} - 4\widetilde{b}_\sigma g_{\tau,p}$$

Da die rechte Seite der Gleichung konstant ist, muss auch $\partial_p \partial_\tau \widetilde{\omega}_\sigma$ konstant sein. Somit ist der allgemeinte Ansatz für ω_σ der Folgende:

$$\omega_\sigma = A_\sigma + \sum_p B_{\sigma p} x_p + \sum_{\tau,p} C_{\sigma\tau p} x_p x_\tau \tag{7}$$

Dieses können wir in die obere Gleichung einsetzen und erhalten

$$C_{\sigma\tau p} + C_{\sigma p\tau} = \partial_p \partial_\tau \omega_\sigma = -2b_\tau g_{\sigma,p} - 2b_p g_{\sigma,\tau} - 2b_\sigma g_{\tau,p}$$

Wegen $x_p x_\tau = x_\tau x_p$ können wir o.B.d.A. $C_{\sigma\tau p} = C_{\sigma p\tau}$ annehmen, also:

$$C_{\sigma\tau p} = -b_\tau g_{\sigma,p} - b_p g_{\sigma,\tau} - b_\sigma g_{\tau,p}$$

Nun setzen wir Gleichung (7) in Gleichung (3) ein (beachte: $\partial_p \omega_\sigma = B_{\sigma p} + \sum_\tau C_{\sigma\tau p} x_\tau + \sum_\tau C_{\sigma p\tau} x_\tau = B_{\sigma p} + 2\sum_\tau C_{\sigma\tau p} x_\tau$)

$$B_{\sigma p} + B_{p\sigma} + 2(\sum_\tau C_{\sigma\tau p} x_\tau + \sum_\tau C_{p\sigma\tau} x_\tau) = \chi\, g_{\sigma,p}$$

Setzen wir für $C_{\sigma\tau p}$ und $C_{p\sigma\tau}$ die oben berechneten Werte ein, heben sich einige Summanden gegenseitig auf und wir erhalten:

$$B_{\sigma p} + B_{p\sigma} - 4g_{\sigma,p}(b \cdot x) = \chi\, g_{\sigma,p}$$

Wegen $\chi = (2\kappa - 4(b \cdot x))g_{\sigma,p}$ folgt

$$B_{\sigma p} + B_{p\sigma} = 2\kappa g_{\sigma,p} \overset{g_{\sigma,p} = g_{p,\sigma}}{=} \kappa g_{\sigma,p} + \kappa g_{p,\sigma}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$B_{\sigma p} = \kappa g_{\sigma,p} + m_{\sigma,p}\ ,$$

wobei $m_{\sigma,p}$ anti-symmetrisch sein muss, d.h. $m_{\sigma,p} = -m_{p,\sigma}$ (vgl. mit dem Beweis von Satz 3.3(ii)!)
Wir setzen nun die berechneten Werte von $B_{\sigma p}$ und $C_{\sigma\tau p}$ in Gleichung (7) ein (und wir setzen $A_\sigma = c_\sigma$):

$$\begin{aligned}\omega_\sigma &= c_\sigma + \sum_p (\kappa g_{\sigma,p} + m_{\sigma,p}) x_p + \sum_{\tau,p} (-b_\tau g_{\sigma,p} - b_p g_{\sigma,\tau} - b_\sigma g_{\tau,p}) x_p x_\tau \\ &\overset{(*)}{=} c_\sigma + \kappa x_\sigma + \sum_p m_{\sigma,p} x_p + -b_\sigma \mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) x_\sigma\end{aligned}$$

In (*) haben wir benutzt, dass wir hier o.B.d.A. $C = g_{\sigma,\sigma}C$ annehmen können, da wir den Konstanten Wert C frei gewählt haben und somit entsprechend anpassen können.
Wir haben also gesehen, dass jede infinitesimale, konforme Transformation sich durch eine Funktion ω wie in Bemerkung 3.4 beschreiben lässt. Also ist (T+R+D+S) schon die allgemeinste Form!

$\square$

3.6 Folgerung

Die Dimension der konformen Gruppe in $\mathbb{R}^{m,n}$, $d = m + n > 2$, ist:

$$\tfrac{1}{2}(d+1)(d+2)$$

Beweis:
Offensichtlich gilt: Die Dimension der Gruppe der Translationen und der speziellen konformen Transformationen ist d, die Dimension der Dilatationen ist 1. Da Rotationsmatrizen antisymmetrisch sind, sind offensichtlich von den d^2 Einträgen der Matrix $1+2+...+(d-1) \overset{\text{Ind.}}{=} \frac{1}{2}d(d-1)$ Einträge frei wählbar, die restlichen Einträge sind durch die Gleichung $m_{\sigma,p} = -m_{p,\sigma}$ eindeutig bestimmt. Die Dimension der Rotationen ist somit $\frac{1}{2}d(d-1)$. Mit Satz 3.5 folgt, dass die Dimension der konformen Gruppe $d + \frac{1}{2}d(d-1) + 1 + d = \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ beträgt.

$\square$

Literatur

[1] M. Schottenloher. *A mathematical introduction to conformal field theory (second edition).* Springer-Verlag, 2008

[2] M. Gaberdiel. *Konforme Feldtheorie.* Vorlesungsskript WS 2003/2004, 2004.

[3] V. Arnold *Gewöhnliche Differentialgleichungen (2.Auflage).* Springer-Verlag, 2005