Das zweidimensionale Ising-Modell und seine Beziehung zur konformen Feldtheorie

Phasenübergänge 2. Ordnung realisieren Skaleninvarianz. Ein wichtiges Beispiel ist der Ferromagnet an seiner kritischen Temperatur T_c. Unterhalb T_c zeigen alle Spins in die gleiche Richtung; oberhalb T_c sind die Spins ungeordnet, und exakt bei $T = T_c$ gibt es geordnete Bereiche jeder Größe und Richtung. Das Ising-Modell ist ein vereinfachtes Modell des Ferromagneten, in dem die Spins nur in eine Richtung zeigen und dabei die Werte ± 1 annehmen. Das $(d \geq 2)$-dimensionale Ising-Modell hat einen kritischen Punkt, und für $d = 2$ kann es bei verschwindendem Magnetfeld exakt gelöst werden. Diese Lösung kann interpretiert werden als Abbildung des $d = 2$-Ising-Modells in ein System nichtwechselwirkender Fermionen. Andererseits können diese Fermionen als konforme Feldtheorie des minimalen Modells zu $c = \frac{1}{2}$ aufgefaßt werden. Wichtige physikalische Größen des $2d$-Ising-Modells wie die Spin-Spin-Korrelation finden ihre Entsprechung in diesem minimalen Modell.

1. Das $d = 1$-Ising-Modell

Die Energie einer Spin-Konfiguration $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ des eindimensionalen Ising-Modells im Magnetfeld h ist

$$E(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = \sum_{n=1}^{N} \Big(-J\sigma_n\sigma_{n+1} - h\sigma_n \Big) , \qquad \sigma_{N+1} \equiv \sigma_1 .$$

Die Zustandssumme ist dann definiert als

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{-\frac{1}{kT}E(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)} .$$

Alle physikalischen Größen lassen sich aus Z gewinnen, siehe Anhang A. Die entscheidende Idee besthet darin, die Summe über $\sigma_i = \pm 1$ als Spur eines Produkts von N (2×2)-Matrizen aufzufassen, wobei $(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \in (\pm, \pm)$ bijektiv auf die Matrixelemente $\begin{pmatrix} (++) & (+-) \\ (-+) & (--) \end{pmatrix}$ abgebildet wird:

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \prod_{n=1}^{N} \exp\Big(K\sigma_n\sigma_{n+1} + B\frac{\sigma_n + \sigma_{n+1}}{2} \Big) = \mathrm{tr}(V^N),\ V \ = \begin{pmatrix} e^{K+B} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-B} \end{pmatrix},$$

mit $K := \frac{J}{kT}$, $B := \frac{h}{kT}$. Man nennt V die Transfermatrix. Sind $\lambda_+ > \lambda_-$ die beiden Eigenwerte von V, so folgt $F = -kT\ln(\lambda_+^N + \lambda_-^N) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} = -NkT\ln(\lambda_+)$.

2. Das $d = 2$-Ising-Modell

Wir folgen [1].

Wir betrachten ein rechteckiges $(N+1) \times M$-Gitter mit Spin $\sigma_{nm} = \pm 1$ am Punkt (mn). Sei $S_n = (\sigma_{nm})_{m=1,\ldots,M}$ die Konfiguration der n-ten Spin-Reihe, periodisch mit $\sigma_{n,M+1} = \sigma_{n1}$, so ist der Beitrag einer Konfiguration $(S_0, \ldots, S_N)$ zur Zustandssumme gegeben durch die Dichte-Matrix $\rho_N(S_0, \ldots, S_N) = \exp(-\beta E(S_0, \ldots, S_N))$,

$$\rho_N(S_0, \ldots, S_N) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{N} (H_n^0 + H_n^1 + H_n^2)\Big) \cdot E_0(S_0) \ ,$$

$$H_n^0 = B \sum_{m=1}^{M} \sigma_{nm} \ , \quad H_n^1 = K_1 \sum_{m=1}^{M} \sigma_{n-1,m}\sigma_{nm} \ , \quad H_n^2 = K_2 \sum_{m=1}^{M} \sigma_{nm}\sigma_{n,m+1} \ .$$

Dabei wird die 0-te Spin-Reihe durch Randbedingungen bestimmt, anschließend wechselwirken die n-te Reihe mit der $(n-1)$-ten über H_n^1, und die N-te Reihe hat nur Wechselwirkung mit der $(N-1)$-ten. Die Zustandssumme kann dann reihenweise berechnet werden durch die Rekursionsformel

$$Z = \sum_{(S_N) \in (\pm 1)^M} Z_N(S_N) \ , \qquad Z_n(S_n) = \exp(H_n^0 + H_n^2) \sum_{S_{n-1} \in (\pm 1)^M} \big(\exp(H_n^1) Z_{n-1}(S_{n-1})\big) \ ,$$

und $Z_0(S_0) = E_0(S_0)$. Wegen $\sigma_{mn} = \pm 1$ läßt sich $Z_{N-1}(S_{N-1})$ entwickeln als

$$\begin{aligned} Z_{N-1}(S_{N-1}) = a_0 + \sum_{m=1}^{M} a_m \sigma_{N-1,m} + \sum_{1 \leq m_1 \neq m_2 \leq M} a_{m_1 m_2} \sigma_{N-1,m_1} \sigma_{N-1,m_2} + \ldots \\ + a_{12\ldots M} \sigma_{N-1,1} \cdots \sigma_{N-1,M} \ . \end{aligned} \tag{*}$$

Wegen $\exp(H_N^1) = \prod_{m=1}^{M} \exp(K_1 \sigma_{Nm} \sigma_{N-1,m})$ treten in der Summe über $\sigma_{N-1,m} = \pm 1$ aus $\sum_{S_{N-1}}$ nur zwei Möglichkeiten auf:

$$\sum_{\sigma_{N-1,m} = \pm 1} \exp(K_1 \sigma_{Nm} \sigma_{N-1,m}) 1 = 2\cosh(K_1 \sigma_{Nm}) = 2\cosh(K_1) \ ,$$

$$\sum_{\sigma_{N-1,m} = \pm 1} \exp(K_1 \sigma_{Nm} \sigma_{N-1,m}) \sigma_{N-1,m} = 2\sinh(K_1 \sigma_{Nm}) = 2\sinh(K_1) \sigma_{Nm} \ .$$

Somit gilt, falls $Z_{N-1}(S_{N-1})$ als Entwicklung (*) dargestellt wird, in der jeder Spin $\sigma_{N-1,m}$ aus S_{N-1} höchstens einmal vorkommt,

$$Z_N(\sigma_{N1}, \ldots, \sigma_{NM}) = \exp(H_N^0 + H_N^2)(2\cosh(K_1))^M Z_{N-1}(\tanh(K_1)\sigma_{N1}, \ldots \tanh(K_1)\sigma_{NM}) \ .$$

Diese Darstellung wird erzwungen, wenn wir gemischt-kommutierende Operatoren σ_m^+, σ_m^- einführen:

$$[\sigma_m^\pm, \sigma_{m'}^\pm] = 0 \text{ für } m \neq m' \ , \qquad \{\sigma_m^+, \sigma_m^-\} = 1 \ , \ (\sigma_m^+)^2 = (\sigma_m^-)^2 = 0$$

die wie folgt auf das Vakuum $|\Omega\rangle$ wirken:

$$\sigma_m^+|\Omega\rangle = \sigma_{Nm}|\Omega\rangle \ , \qquad \sigma_m^-|\Omega\rangle = 0 \ .$$

Der Entwicklung (*) von $Z_{N-1}(S_N)$ entspricht ein eindeutig bestimmter Vektor $\hat{Z}_{N-1}|\Omega\rangle$ im Fockraum $\mathcal{F}$, der durch Wirkung von $(\sigma_m^\pm)$ auf $|\Omega\rangle$ erzeugt wird. Dann gilt für den entsprechenden Vektor zu $Z_N(S_N)$:

$$\hat{Z}_N(\sigma_m^\pm)|\Omega\rangle = (2\cosh K_1)^M \exp(\hat{H}_N^0 + \hat{H}_N^2)\big(\tanh(K_1)\big)^{\sum_{m=1}^M \sigma_m^+\sigma_m^-} \hat{Z}_{N-1}(\sigma_m^\pm)|\Omega\rangle \ ;$$

dabei ist $\sum_{m=1}^M \sigma_m^+\sigma_m^-$ der Zähloperator. Mit der Umdefinition $\tanh(K_1) = \exp^{-2K_1^*}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_N(\sigma_m^\pm)|\Omega\rangle &= \hat{V}_2(\sigma_m^\pm)\hat{V}_1(\sigma_m^\pm)\hat{Z}_{N-1}(\sigma_m^\pm)|\Omega\rangle \\
\hat{V}_2 &= \exp\Big(\sum_{m=1}^M B(\sigma_m^+ + \sigma_m^-)\Big)\exp\Big(\sum_{m=1}^M K_2(\sigma_m^+ + \sigma_m^-)(\sigma_{m+1}^+ + \sigma_{m+1}^-)\Big) \ , \\
\hat{V}_1 &:= (2\cosh K_1)^M \exp(-2K_1^* \sum_{m=1}^M \sigma_m^+\sigma_m^-) \ .
\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß $(\sigma_m^+ + \sigma_m^-)$ angewandt auf eine Vektor im Fock-Raum genau der Multiplikation der Entwicklung (*) mit σ_{Mm} entspricht: Ist in (*) ein σ_{Mm} vorhanden, so wird es durch Multiplikation mit σ_{Mm} vernichtet. Die obige Rekursion läßt sich damit ausführen zu

$$\hat{Z}_N(\sigma_m^\pm)|\Omega\rangle = \big(\hat{V}_2(\sigma_m^\pm)\hat{V}_1(\sigma_m^\pm)\big)^N \hat{Z}_0|\Omega\rangle \ .$$

Nun überlegt man sich leicht, daß die ursprüngliche Summe $Z = \sum_{(S_N)\in(\pm 1)^M} Z_N(S_N)$ nichts anderes ist als die Spur des Operators $\hat{Z}_N$ im Fock-Raum. Da Zustände mit verschiedener Teilchenzahl orthogonal sind, liefert in der entsprechenden Entwicklung (*) von Z_N nur der Term a_0 einen Beitrag, und dieser ist für jeden der 2^M Vektoren aus der Orthonormalbasis von $\mathcal{F}$ gleich. Man kann nun $\hat{Z}_0(\sigma_m^\pm)$ frei wählen, z.B. $\hat{Z}_0(\sigma_m^\pm) = \frac{1}{2^M}$ oder besser $\hat{Z}_0(\sigma_m^\pm) = \frac{1}{2^M}\hat{V}_2(\sigma_m^\pm)$, so daß $\hat{V}_2\hat{V}_1$ durch einen symmetrischen Operator $\hat{V}_2^{\frac{1}{2}}\hat{V}_1\hat{V}_2^{\frac{1}{2}}$ ersetzt werden kann:

$$Z = 2^M\langle\Omega|\hat{Z}_N(\sigma_m^\pm)|\Omega\rangle = \langle\Omega|\hat{V}_2^{\frac{1}{2}}\big(\hat{V}_2^{\frac{1}{2}}\hat{V}_1\hat{V}_2^{\frac{1}{2}}\big)^N\hat{V}_2^{\frac{1}{2}}|\Omega\rangle \ .$$

Die resultierende Verschiebung des Vakuums um $\hat{V}_2^{\frac{1}{2}}$ kann im Limes $N\to\infty$ vernachlässigt werden.

Somit ist die Berechnung von Z wieder zurückgeführt auf die Berechnung des größten Spektralwerts von $\hat{V} := \hat{V}_2^{\frac{1}{2}}\hat{V}_1\hat{V}_2^{\frac{1}{2}}$. Problematisch dabei ist der gemischt-kommutative Charakter der $\sigma_m^\pm$. Dieser kann durch eine nichtlineare (und nichtlokale) Jordan-Wigner-Transformation in rein fermionische (antikommutierende) Operatoren überführt werden:

$$C_m := \Big(\exp\Big(\pi \mathrm{i}\sum_{j=1}^{m-1}\sigma_j^+\sigma_j^-\Big)\Big)\sigma_m^- \ , \qquad C_m^\dagger := \Big(\exp\Big(\pi \mathrm{i}\sum_{j=1}^{m-1}\sigma_j^+\sigma_j^-\Big)\Big)\sigma_m^+ \ .$$

Man zeigt $\{C_m, C^\dagger_{m'}\} = \delta_{m,m'}$, $\{C_m, C_{m'}\} = \{C^\dagger_m, C^\dagger_{m'}\} = 0$ sowie

$$\sigma^+_m \sigma^-_m = C^\dagger_m C_m \ ,$$

und für $m \leq M-1$

$$\sigma^+_m \sigma^-_{m+1} = C^\dagger_m C_{m+1} \ , \quad \sigma^+_m \sigma^+_{m+1} = C^\dagger_m C^\dagger_{m+1} \ , \quad \sigma^-_m \sigma^-_{m+1} = -C_m C^\dagger_{m+1} \ , \quad \sigma^-_m \sigma^-_{m+1} = -C_m C_{m+1} \ ,$$

d.h. die bilineare Terme aus $\hat{V}_i$ bleiben bis auf Vorzeichen erhalten. Dagegen wird der lineare Term in $\hat{V}_2$ kompliziert, so daß die Lösung des $2d$-Ising-Modells nur für $B = 0$ möglich ist. Es zeigt sich, daß die Periodizität $\sigma_{NM+1} = \sigma_{M1}$ zwei mögliche Randbedingungen $C_{M+1} = \pm C_1$ und $C^\dagger_{M+1} = \pm(-C^\dagger_1)$ erzwingt. In jedem Fall gilt

$$\hat{V}_1 = (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \exp\Big(-2K_1^* \sum_{m=1}^{M} (C^\dagger_m C_m - \frac{1}{2})\Big) \ , \qquad \hat{V}_2 = \exp\Big(\sum_{m=1}^{M} K_2 (C^\dagger_m - C_m)(C^\dagger_{m+1} + C^-_{m+1})\Big) \ .$$

Die Berechnung des größten Spektralwerts erfolgt über geeignete Linearkombinationen ξ_q der $C_m, C^\dagger_m$. Das sind Fourier-Transformation $C_m = (\mathrm{i}M)^{-\frac{1}{2}} \sum_q e^{\mathrm{i}mq} \eta_q$ und analog für $C^\dagger_m$ sowie Bogoliubov-Tranformation $\xi_q = \eta_q \cos\phi_q + \eta^\dagger_{-q} \sin\phi_q$ und $\xi^\dagger_q = \eta_q \sin\phi_q + \eta^\dagger_{-q} \cos\phi_q$ für einen geeigneten Winkel ϕ_q (beide Vorzeichen von $\sin\phi_q$ sind gleich!). Die $\xi_q, \xi^\dagger_q$ sind, da sie (analog zu Cooper-Paaren in der Supraleitung) q und $(-q)$ verbinden, nichtlokale Operatoren. Man erhält schließlich

$$\hat{V}^\pm = (2\sinh(2K_1))^{\frac{M}{2}} \exp\Big[-\sum_q \epsilon_q (\xi^\dagger_q \xi_q - \frac{1}{2})\Big] \ ,$$

mit $\cosh\epsilon_q = \cosh(2K_2)\cosh(2K_1^*) - \sinh(2K_2)\sinh(2K_1^*)\cos q$ und $q^+ \in \frac{2k+1}{M}\pi \cap]-\pi,\pi]$ $q^- \in \frac{2k}{M}\pi \cap]-\pi,\pi]$. Das ist der Energie-Operator für $2M-2$ unabhängigen Fermionen der Energie ϵ_q. Die freie Energiedichte ist dann [Onsager, 1944]

$$f = -\frac{kT}{2}\ln(2\sinh(2K_1)) - \frac{kT}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \epsilon_q dq \ .$$

An der kritischen Temperatur T_c divergiert die spezifische Wärme $c = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$ (wie sich zeigt: logarithmisch). Man findet die Bedingung $\sinh(2K_2)\sinh(2K_1) = 1$ [Kramers+Wannier, 1941].

3. Kritische Exponenten

Siehe [2, 4].

Die Skalenhypothese besagt, daß das Verhalten eines Systems in der Nähe eines Phasenübergangs 2. Ordnung durch einfache Potenzgesetze beschrieben wird. Die zugehörigen Exponenten heißen kritische Exponenten. Renormierungsgruppenmethoden liefern einen Beweis der Skalenhypothese. Sei T_c die kritische Temperatur des Phasenübergangs und

$t := \frac{|T-T_c|}{T_c}$. Man nimmt an, daß es Exponenten a, b gibt, so daß die freie Energiedichte $f(t,h)$ dem Potenzgesetz

$$f(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda f(t,h) \ , \qquad \lambda > 0$$

genügt. Setzt man $\lambda = t^{-\frac{1}{\alpha}}$, so folgt $f(t,h) = t^{\frac{1}{a}} f(1,y)$ mit $y = t^{-\frac{b}{a}} h$. Am kritischen Punkt ist $h = 0$, und mit $(\lambda = t^{-\frac{1}{a}})$ folgt $f(t,0) \sim t^{\frac{1}{a}} f(1,0)$.

Das Verhalten der Korrelationslänge ξ des System, der Dichte der spezifischen Wärme c, der Dichte der spontanen Magnetisierung m für $T < T_c$ sowie der Suszeptibiltätsdichte definiert weitere kritische Exponenten $\nu, \alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\xi \sim t^{-\nu} \ , \qquad c\big|_{h=0} \sim t^{-\alpha} \ , \qquad m\big|_{h=0} \sim t^{\beta} \ , \qquad \chi\big|_{h=0} \sim t^{-\gamma} \ , \qquad m\big|_{t=0} \sim h^{\frac{1}{\delta}} \ .$$

Wegen $c \sim \frac{\partial^2 f(t,0)}{\partial t^2} \sim t^{\frac{1}{a}-2}$ folgt $\alpha = 2 - \frac{1}{a}$. Wegen $m \sim \frac{\partial f(t,h)}{\partial h}\big|_{h=0} = t^{\frac{1-b}{a}} \frac{\partial f(1,y)}{\partial y}\big|_{y=0}$ folgt $\beta = \frac{1-b}{a}$. Wegen $\chi \sim \frac{\partial^2 f(t,h)}{\partial h^2}\big|_{h=0} = t^{\frac{1-2b}{a}} \frac{\partial^2 f(1,y)}{\partial y^2}\big|_{y=0}$ folgt $\gamma = \frac{2b-1}{a}$. Schließlich ist $f(1,y) \sim y^{1+\frac{1}{\delta}}$. Existenz von $m\big|_{t\to 0}$ erfordert $t^{-\frac{b}{a\delta}} t^{1-b} a = \text{const}$, also $\delta = \frac{b}{1-b}$.

Die spezifische Wärme ist die Varianz der Energie E. Ist $\varepsilon(i)$ die lokale Energie des i-ten Spins, abhängig von der Spin-Konfigutraion, und $\mathcal{N}$ die Gesamtzahl der Spins, dann ist

$$c = \frac{1}{\mathcal{N} k T^2} \Big(\Big\langle \sum_{i,i'} \varepsilon(i)\varepsilon(i') \Big\rangle - \Big\langle \sum_{i} \varepsilon(i) \Big\rangle \Big\langle \sum_{i'} \varepsilon(i') \Big\rangle \Big) = \frac{1}{\mathcal{N} k T^2} \sum_{i,i'} \Big(\langle \varepsilon(i)\varepsilon(i') \rangle - \langle \varepsilon(i) \rangle \langle \varepsilon(i') \rangle \Big)$$

Wegen der Translationsinvarianz ist $\langle \varepsilon(i) \rangle = \langle \varepsilon(0) \rangle$ ortsunabhängig und $\langle \varepsilon(i)\varepsilon(i') \rangle = \langle \varepsilon(i-i')\varepsilon(0) \rangle$ hängt nur von der Differenz der Orte ab. Somit folgt

$$c = \frac{1}{kT^2} \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} \Big(\langle \varepsilon(n)\varepsilon(0) \rangle - \langle \varepsilon(0) \rangle^2 \Big)$$

d.h. die Dichte der spezifischen Wärme ist die Summe der Zweipunkt-Korrelationsfunktion $G^{(2)}_{\varepsilon}(n) := \langle \varepsilon(n)\varepsilon(0) \rangle - \langle \varepsilon(0) \rangle^2$ der Energie. Wir machen den Ansatz $\langle \varepsilon(n)\varepsilon(0) \rangle - \langle \varepsilon(0) \rangle^2 \sim \frac{e^{-\frac{|n|}{\xi}}}{|n|^p}$, so daß folgt

$$c \sim \int_{\mathbb{R}^d} dn \ G^{(2)}_{\varepsilon}(n) \sim \int_0^\infty |n|^{d-1} d|n| \ \frac{e^{-\frac{|n|}{\xi}}}{|n|^p} \sim \xi^{d-p} \sim t^{-\nu(d-p)} \sim t^{-\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad p = d - \frac{\alpha}{\nu} \ .$$

Analog ist die Magentisierungsdichte das Integral der Spin-Spin-Korrelationsfunktion

$$G^{(2)}_{\sigma}(n) := \langle \sigma(n)\sigma(0) \rangle - \langle \sigma(0) \rangle^2 \sim \frac{e^{-\frac{|n|}{\xi}}}{|n|^{d-2+\eta}} \ .$$

Deren Abfall am kritischen Punkt definiert einen weiteren wichtigen kritischen Exponenten η, die anomale Dimenions. Analog ergibt sich

$$\chi \sim \xi^{d-(d-2+\eta)} \sim t^{-\nu(2-\eta)} \sim t^{-\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \nu(2-\eta) \ .$$

Die Renormierungsgruppe gestattet die Herleitung einer wichtigen Beziehung zwischen α und ν. Dazu fassen wir in jeder Raum-Richtung r Spins zu einem Block-Spin $R\Sigma_I = \sum_{i\in\{1,\ldots,r\}^d}\sigma_i$ zusammen. Dabei entsteht eine neue Energiefunktion $E(\Sigma) = -\sum_{I,I'} J'\Sigma_I\Sigma_{I'} - h'\sum_I \Sigma_I$ mit renormiertem Magnetfeld $h' = Rh$ und renormierter Kopplungskonstante J'. Die neue charakteristische Länge ist $\xi' = \xi/r$, die renormierte Temperatur damit $t' = (\xi')^{-\frac{1}{\nu}} = r^{\frac{1}{\nu}}t$.

Die gesamte freie Energie bleibt unverändert, so daß die mittlere freie Energie pro Blockspin vergrößert ist zu $f(t',h') = r^d f(t,h)$. Somit folgt mit $r = \lambda^{\frac{1}{d}}$:

$$\lambda f(t,h) = f(\lambda^{\frac{1}{d\nu}}t, Rh) ,$$

aus der wir $a = \frac{1}{d\nu}$ oder $\alpha = 2 - \nu d$ gewinnen. Somit ergeben sich alle Exponenten als Funktion von ν, η:

$$\alpha = 2 - d\nu , \quad \beta = \frac{\nu}{2}(d-2+\eta) , \quad \gamma = \nu(2-\eta) , \quad \delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta} .$$

Die Werte sind aus der konkreten Darstellung der freien Energiedichte f zu bestimmen, und man findet für das $2d$-Ising-Modell

$$\eta = \frac{1}{4} , \qquad \nu = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0 \quad \beta = \frac{1}{8} , \quad \gamma = \frac{7}{8} , \quad \delta = 15 .$$

Dabei ist $\alpha = 0$ tatsächlich eine logarithmische Divergenz. Der Wert $\nu = 1$ heißt $\xi^{-1} \sim |T - T_c|$ oder, da ξ^{-1} als Masse m identifiziert wird, $m \sim |T - T_c|$.

Es zeigt sich ferner, daß die kritischen Exponenten in Universalitätsklassen fallen, d.h. die Exponenten sind nur abhängig von der Dimension und der Reichweite der Wechselwirkung, nicht aber von Details des Modells. Eine andere einfache Klasse ist die $d = 4$ mean field theory mit $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ und $\delta = 3$, entsprechend $\nu = \frac{1}{2}$, $\eta = 0$.

4. Konforme Feldtheorie

Da das System am kritischen Punkt skaleninvariant ist, ist es plausibel (wenn auch kein Beweis zu finden war[1]), daß das zum kritischen Punkt des Ising-Modells gehörige fermionische Modell durch das skaleninvariante freie masselose Fermion gegeben ist, also durch die Wirkung

$$\int d^2z(\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}) .$$

Die Feldgleichungen sind $\bar{\partial}\psi = 0$ und $\partial\bar{\psi} = 0$, d.h. ψ ist ein rein chirales Feld und $\bar{\psi}$ ein rein antichirales.

Wir hatten gesehen, daß jedes der freien Fermionen $\psi, \bar{\psi}$ zentrale Ladung $c = \frac{1}{2}$ hat. Es gehört in die Klasse der minimalen Modelle, also der Höchstgewichtsdarstellungen der

[1] Es ist nicht so klar, daß sich $\epsilon_q = q$ im Limes $\mathcal{N} \to \infty$ ergibt: Für symmetrische Gitter mit $K_1 = K_2$ ergibt sich am kritischen Punkt $\sinh\frac{\epsilon_q}{2} = \sin\frac{q}{2}$.

Virasoro-Algebra zu $c < 1$, welche ein positives Skalarprodukt erlauben. Nach Kac sowie Friedan-Qiu-Shenker gibt es nur die folgenden abzählbar vielen Lösungen $(m, q, p \in \mathbb{N})$:

$$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \, , \qquad m \in \mathbb{N} \, , \; m \geq 2$$
$$h = h_{pq}(c) = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)} \, , \qquad 1 \leq p \leq m-1 \, , \; 1 \leq q \leq m \, .$$

Wegen $h_{m-p,m+1-q}(c) = h_{p,q}(c)$ verbleiben für $c = \frac{1}{2}$, also $m = 3$, folgende Möglichkeiten des höchstens Gewichts:

$$h_{11}(\tfrac{1}{2}) = 0 \, , \qquad h_{21}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} \, , \qquad h_{12}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{16} \, .$$

Wir werden argumentieren, daß alle drei Fälle im Ising-Modell realisiert sind.

Wir suchen gemeinsame Höchstgewichtsdarstellungen der Virasoro-Algebren erzeugt von $L_n, \bar{L}_n$. Entsprechend ist $|h, \bar{h}\rangle$ ein primäres Feld mit $L_0|h, \bar{h}\rangle = h|h, \bar{h}\rangle$ und $\bar{L}_0|h, \bar{h}\rangle = \bar{h}|h, \bar{h}\rangle$. Für $h, \bar{h}$ sind nur die Werte aus der Kac-Formel möglich. Im Prinzip könnte $h \neq \bar{h}$ sein, das wird jedoch durch Betrachtungen zur modularen Invarianz auf dem Torus ausgeschlossen.

Das primäre Feld $\Phi = |h, \bar{h}\rangle$ transformiert sich unter konformen Transformationen $(z, \bar{z}) \mapsto (w(z), \bar{w}(\bar{z}))$ gemäß

$$\Phi(z, \bar{z}) = \Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^h \Big(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\Big)^{\bar{h}} \Phi(w, \bar{w}) \, .$$

Die 2-Punkt Korrelationsfunktion $G^{(2)}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) := \langle \Phi(z_1, \bar{z}_1)\Phi(z_2, \bar{z}_2)\rangle - \langle \Phi(z_1, \bar{z}_1)\rangle\langle \Phi(z_2, \bar{z}_2)\rangle$ ist dann vollständig durch die konforme Symmetrie festgelegt zu

$$G^{(2)}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{C}{|z_1 - z_2|^{2h_1}|\bar{z}_1 - \bar{z}_2|^{2h_2}} \, .$$

Somit ist die Korrelationsfunktion zum primären Feld $\Phi_{1,1} = |0, 0\rangle$ konstant, d.h. $\Phi_{1,1}$ ist der Identitätsoperator. Für das Feld $\Phi_{1,2} = |\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\rangle$ gilt

$$\langle \Phi_{1,2}(z, \bar{z})\Phi_{1,2}(0, 0)\rangle \sim \frac{1}{|z|^{2(h_1+h_2)}} = \frac{1}{|z|^{\frac{1}{4}}} \, ,$$

so daß wir $\Psi_{1,2} = \sigma$ mit dem Spin-Operator im Ising-Modell identifizieren, dessen Korrelation mit $\frac{1}{|z|^\eta}$ abfällt. Der kritische Exponent $\eta = \frac{1}{4}$ ergibt sich somit aus der Gewichtsformel des minimalen Modells.

Ebenso findet man für das Feld $\Phi_{2,1} = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

$$\langle \Phi_{2,1}(z, \bar{z})\Phi_{2,1}(0, 0)\rangle \sim \frac{1}{|z|^{2(h_1+h_2)}} = \frac{1}{|z|^2} \, .$$

Damit identifizieren wir $\Phi_{2,1} = \varepsilon$ mit der Energiedichte, deren Korrelation mit $\frac{1}{|z|^{2(d-\frac{1}{\nu})}} = \frac{1}{|z|^2}$ abfällt wegen $\nu = 1$.

Die Interpretation als konforme Feldtheorie liefert weitere Informationen [2]. Ausgangspunkt ist die Möglichkeit, daß es $a \in \mathbb{R}$ geben kann mit $L_{-2}\langle h\rangle + aL_{-1}^2|h\rangle = 0$. Anwenden von L_1 und Berücksichtigung von $L_1|h\rangle = 0$ liefert $(3+2a(2h+1))L_{-1}|h\rangle = 0$. Anwenden von L_2 liefert $(4h + \frac{c}{2} + 6ah)|h\rangle = 0$. Damit gibt es ein solches a genau dann, wenn $c = \frac{2h(5-8h)}{2h+1}$. Man bestätigt, daß das für $c = \frac{1}{2}$ und $h = \frac{1}{2}$ oder $h = \frac{1}{16}$ der Fall ist. Folglich gilt für eine beliebige Korrelationsfunktion des primären Feldes $\Phi_h = |h\rangle$ mit Feldern $\Psi_1, \ldots, \Psi_k$ die Identität

$$\Big\langle \Big(L_{-2}\Phi_h - \frac{3}{2(2h+1)} L_{-1}^2 \Phi_h(w) \Big) \Psi(w_1) \ldots \Psi(w_k) \Big\rangle = 0 \; .$$

Zunächst ist $(L_{-1}\Psi)(w) = \partial\Psi(w)$ die Translation. Unter Verwendung der Operatorproduktentwicklung des Energie-Impuls-Tensors

$$T(z)A(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (z-w)^{-n-2}(L_n A)(w)$$

folgt für primäre Felder $A \mapsto \Phi_h$ mit $L_n\Phi_h = 0$ für $n > 0$:

$$(L_{-2}\Phi_h)(w) = T(z)\Phi_h(w) - \frac{(\partial\Phi_h)(w)}{z-w} - \frac{h}{(z-w)^2} + o(z-w) \; .$$

Andererseits gilt für Korrelationsfunktionen des Energie-Impuls-Tensors als Folge der konformen Ward-Identität

$$\big\langle T(z)\Psi(w_1)\ldots\Psi(w_k)\big\rangle = \sum_{i=1}^{k} \Big(\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i}\frac{\partial}{\partial w_i} \Big) \big\langle \Psi(w_1)\ldots\Psi(w_k)\big\rangle + o(z-w_i) \; ,$$

wenn h_i die Gewichte der $\Psi(w_i)$ sind. Beide Identitäten zusammen liefern die folgende Differentialgleichung 2. Ordnung für die Korrelationsfunktionen:

$$\begin{aligned} & - \frac{3}{2(2h+1)} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \langle \Phi_h(w)\Psi(w_1)\ldots\Psi(w_k)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \Big(\frac{h_i}{(w-w_i)^2} + \frac{1}{w-w_i}\frac{\partial}{\partial w_i} \Big) \langle \Phi_h(w)\Psi(w_1)\ldots\Psi(w_k) \Big\rangle \; . \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur 2-Punktfunktion (und 3-Punktfunktion) läßt die Kovarianz unter konformen Transformationen eine gewisse Freiheit für die 4-Punktfunktion. Mit $z_{ij} = z_i - z_j$, $\bar{z}_{ij} = \bar{z}_i - \bar{z}_j$ gilt:

$$G^{(4)}(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_4, \bar{z}_4) = \Big(\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{23}z_{34}z_{41}} \Big)^{2h} \Big(\frac{\bar{z}_{13}\bar{z}_{24}}{\bar{z}_{12}\bar{z}_{23}\bar{z}_{34}\bar{z}_{41}} \Big)^{2\bar{h}} F(x, \bar{x})$$

für eine zunächst beliebige Funktion $F(x, \bar{x})$ der Variablen $x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}$ und $\bar{x} = \frac{\bar{z}_{12}\bar{z}_{34}}{\bar{z}_{13}\bar{z}_{24}}$. Die obige DGL liefert dann für $h = \frac{1}{16}$:

$$\Big(x(1-x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\tfrac{1}{2} - x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{16} \Big) F(x, \bar{x}) = 0 \; .$$

Wenn $x, \bar{x}$ zueinander konjugiert-komplex sind, ist die einzige Lösung $F(x,\bar{x}) = b(|1 + \sqrt{1-x}| + |1 - \sqrt{1-x}|)$. Betrachtung des Limes $x, \bar{x} \to 0$ liefert $b = \frac{1}{2}$ und damit für die 4-Spin-Korrelationsfunktion

$$G_\sigma^{(4)}(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_4, \bar{z}_4) = \frac{1}{2}\left|\frac{z_{13}z_{24}}{z_{12}z_{23}z_{34}z_{41}}\right|^{\frac{1}{4}}\left(\left|1+\sqrt{1-\frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}}\right| + \left|1-\sqrt{1-\frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}}\right|\right).$$

Eine solche Beziehung ließe sich, wenn überhaupt, nur sehr schwer direkt im Ising-Modell beweisen!

A. Thermodynamische Größen

k - Boltzmann-Konstante, T - Temperatur

- Zustandssumme $Z = \sum\limits_{s-\text{Zustände}} \exp\Big(-\frac{1}{kT}E(s)\Big)$
- Wahrscheinlichkeit des Zustands s ist $p(s) = \frac{1}{Z}\exp(-\frac{1}{kT}E(s))$, folglich Mittelwert einer Größe $G(s)$ gegeben durch
  $\langle G\rangle = \sum_{s-\text{Zustände}} p(s)G(s) = \frac{1}{Z}\sum_{s-\text{Zustände}} G(s)\exp(-\frac{1}{kT}E(s))$
- mittlere Energie $U = \langle E\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{s-\text{Zustände}} E(s)\exp(-\frac{1}{kT}E(s)) = kT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T}$
- Entropie $S = -k\sum_{s-\text{Zustände}} p(s)\ln p(s) = \frac{U}{T} + k\ln Z = \frac{\partial}{\partial T}(kT\ln Z)$
- Freie Energie $F = U - TS = -kT\ln Z$, dann $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$
- spezifische Wärme $C = \frac{\partial U}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = T\frac{\partial^2}{\partial T^2}(kT\ln Z) = \frac{1}{kT^2}\big(\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2\big)$

Ist $\mathcal{N}$ die Teilchenzahl, so sind $f = \frac{F}{\mathcal{N}}$ und $\varepsilon = \frac{U}{\mathcal{N}}$ die freie und mittlere Energiedichte $c = \frac{C}{\mathcal{N}}$ die Dichte der spezifische Wärme. Für diese exitiert der Kontinuumslimes $\mathcal{N} \to \infty$.

Im Ising-Modell treten weiterhin auf: (h - Magnetfeld)

- Magnetisierung $M = \langle\sigma\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{\sigma_i=\pm1}\sigma_i\exp(-\frac{1}{kT}E(\sigma_i)) = kT\frac{\partial \ln Z}{\partial h} = -\frac{\partial F}{\partial h}$
- Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = \frac{1}{kT}\big(\langle\sigma^2\rangle - \langle\sigma\rangle^2\big)$

Literatur

[1] T. D. Schultz, D. C. Mattis and E. H. Lieb, "Two-dimensional Ising model as a soluble problem of many fermions," Rev. Mod. Phys. **36** (1964) 856–871.

[2] P. H. Ginsparg, "Applied conformal field theory," arXiv:hep-th/9108028.

[3] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, "Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory," Nucl. Phys. B **241** (1984) 333–380.

[4] P. Di Francesco, P. Matthieu, D. Sénéchal, "Conformal field theory", Springer 1997