1 Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition 1.1. Eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist ein Raum M mit:

1. M ist T_2 und zweit-abzählbar,
2. M ist lokal euklidisch, d.h. für jeden Punkt $m \in M$ existieren offene Umgebungen $m \in U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie ein Homöomorphismus $\phi : U \to V$.

Definition 1.2. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Ein C^r-Atlas für M ist eine Familie von Karten

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$$

sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ist eine offene Überdeckung von M.
2. Für jedes Paar $\alpha, \beta \in I$ müssen ϕ_α und ϕ_β C^r-verträglich sein, das heißt, dass falls $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dann muss
$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
C^r sein.

Definition 1.3. Sei X ein Raum. Eine Abbildung $b : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Bilinearform, falls für alle $a, b, c, d \in X$ und für alle $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$b(a + \lambda b, c + \lambda d) = b(a, c) + \lambda b(b, c) + \lambda' b(a, d) + \lambda\lambda' b(b, d).$$

Definition 1.4. Eine Bilinearform heißt nicht ausgeartet, falls

$$b(x, y) = 0 \textit{ für alle } y \in X \Rightarrow x = 0$$

und

$$b(x, y) = 0 \textit{ für alle } x \in X \Rightarrow y = 0.$$

Definition 1.5. Eine Bilinearform $b : X \times X \to \mathbb{R}$ auf dem Raum X heißt symmetrisch, falls für alle $x, y \in X$ gilt, dass $b(x, y) = b(y, x)$.

Definition 1.6. Eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein Paar (M, g) bestehend aus einer n-dimensionalen C^∞-Mannigfaltigkeit M und einem C^∞-Tensorfeld g, welches jedem Punkt $a \in M$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform

$$g_a : T_aM \times T_aM \to \mathbb{R}$$

auf dem Tangentialraum T_aM zuordnet.
Diese Bilinearform wird auch Metrik auf M genannt.

Bemerkung 1.7. Die gerade definierte Metrik ist nicht immer eine Metrik im gewohnten Sinne. Im dritten Abschnitt wird hierzu ein Beispiel gebracht, in dem

$$b(x, x) = 0 \textit{ aber } x \neq 0.$$

Bemerkung 1.8. Seien $x_1, \ldots, x_n$ die lokalen Koordinaten der Mannigfaltigkeit, die durch die Kartenabbildung als $\phi(a) := (x_1(a), \ldots, x_n(a))$ gegeben sind.
Die Bilinearform g_a auf T_aM können wir auch als

$$g_a(X, Y) = g_{\mu\nu}(a) X_\mu Y_\nu$$

schreiben. Hierbei sind $X = X_\mu \partial_\mu, Y = Y_\nu \partial_\nu \in T_aM$ die Tangentialvektoren mit $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.
Wir nehmen die so entstandene Matrix $(g_{\mu\nu}(a))$ und stellen fest, dass

$$\det(g_{\mu\nu}(a)) \neq 0 \ \mathit{und} \ (g_{\mu\nu}(a))^t = (g_{\mu\nu}(a)),$$

da die Bilinearform nicht ausgeartet und symmetrisch ist.

Definition 1.9. Sei $b : X \times X \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Seien desweiteren

$$\begin{aligned} X_+ &:= \{v \in X : b(v, v) > 0\}, \\ X_- &:= \{v \in X : b(v, v) < 0\}, \\ X_0 &:= \{v \in X : b(v, v) = 0\}. \end{aligned}$$

Es bilden X_+, X_-, X_0 eine disjunkte Zerlegung von X. Wir wählen

$$V_0 := \{v \in X : b(v, w) = 0 \ \forall w \in X\} \subseteq X_0$$

und nennen diesen Raum den Ausartungsraum von b.
Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz kann man nun maximale Räume

$$\begin{aligned} V_+ &\subseteq X_+ \\ V_- &\subseteq X_- \end{aligned}$$

eindeutiger Dimension finden, für die gilt, dass

$$\dim(X) = \dim(V_+) + \dim(V_-) + \dim(V_0).$$

Das eindeutige Tripel $(\dim(V_+), \dim(V_-), \dim(V_0))$ wird als die Signatur der Bilinearform b bezeichnet.

Bemerkung 1.10. Da die Bilinearform bei Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten nicht ausgeartet sind und somit der Ausartungsraum $V_0 = \{0\}$ ist, ist der dritte Eintrag der Signatur immer gleich Null. Wir schreiben daher auch (a, b) anstelle von $(a, b, 0)$.

Definition 1.11. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Signatur $(n, 0)$.

Bemerkung 1.12. Die Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind also genau die Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die positiv definite Bilinearformen haben.

Definition 1.13. Eine Lorentz Mannigfaltigkeit ist eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Signatur $(n-1, 1)$ oder $(1, n-1)$.

Beispiel 1.14 (Der Raum $\mathbb{R}^{n,m}$)**.** Der Raum $\mathbb{R}^{n,m} = (\mathbb{R}^{n+m}, g^{n,m})$ für $n, m \in \mathbb{N}$, wobei

$$g^{n,m}(X,Y) := \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i Y_i$$

ist, ist eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Genauer gilt für die induzierte Matrix der Bilinearform, dass

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_m \end{pmatrix} = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n\ mal}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{m\ mal}).$$

Im weiteren Verlauf wird anstelle von $g^{n,m}(X,Y)$ auch $g(x,y)$ geschrieben. Hierbei ist mit obiger Matrix eine Formel für g gegeben durch

$$g(x,y) = x^t (g_{\mu\nu}) y.$$

Bemerkung 1.15.

1. Die Räume $\mathbb{R}^{n,0}$ sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten.
2. Die Räume $\mathbb{R}^{n-1,1}$ und $\mathbb{R}^{1,n-1}$ sind Lorentz Mannigfaltigkeiten.
3. Es gilt $\mathbb{R}^{n,0} \times \mathbb{R}^{0,m} \cong \mathbb{R}^{n,m}$.

2 Konforme Transformationen

2.1 Allgemeine konforme Transformationen

Definition 2.1. Seien (M, G) und (M', g') zwei Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Seien desweiteren $U \subseteq M$ und $V \subseteq M'$ offene Teilmengen. Eine C^∞-Funktion $\phi : U \to V$ heißt konforme Abbildung oder konforme Transformation, falls eine C^∞-Funktion $\Omega : U \to \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

$$\phi^* g' = \Omega^2 g.$$

Hierbei ist $\phi^* g'(X,Y) := g'(T\phi(X), T\phi(Y))$ und $T\phi : TU \to TV$. Ω heißt der konforme Faktor von ϕ.

Bemerkung 2.2. ϕ ist genau dann eine konforme Transformation, wenn

$$\Omega^2 g_{\mu\nu} = (g'_{ij} \circ \phi) \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_j.$$

Satz 2.3. *Seien ϕ und ϕ' konforme Transformationen. Dann ist auch die Komposition $\phi \circ \phi'$ eine konforme Transformation, falls die Abbildungsverknüpfung möglich ist, also die Definitionsmengen geeignet sind.*

Beweis. Ist nach Definition klar. □

Beispiel 2.4. Lokale Isometrien, also C^∞-Funktionen mit $\phi^* g' = g$, sind konforme Transformationen mit konformen Faktor $\Omega = 1$.

Bemerkung 2.5. Im $\mathbb{R}^{n,m}$ bedeutet (2.2) nichts anderes als

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial (K(x))_\mu}{\partial x_\sigma} \frac{\partial (K(x))_\nu}{\partial x_\rho} = \Omega^2(x) g_{\sigma\rho}$$

für jede konforme Transformation K und den von x abhängenden konformen Faktor $\Omega(x)$.

2.2 Konforme Abbildungen im $\mathbb{R}^n$

Für ein einfacheres Verständnis fragen wir uns, was die konformen Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ sind und welche Eigenschaften diese konformen Abbildungen haben.
Zuerst einmal erinnern wir daran, dass durch das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ auch die Winkel zwischen $v, w \neq 0$ gegeben sind. Dieser berechnet sich zu

$$\alpha(v,w) = \arccos(\frac{(v,w)}{\|v\| \, \|w\|}).$$

Wir kommen zu der Definition von konformen Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ als:

Definition 2.6. Eine bijektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt konform, wenn für alle $v, w \neq 0$

$$\alpha(f(v), f(w)) = \alpha(v, w).$$

Bemerkung 2.7. Die konformen Abbildungen sind also genau die Abbildungen, welche die Winkel erhalten.

Lemma 2.8. *f ist genau dann konform, falls f bijektiv ist und zusätzlich gilt, dass*

$$\|f(v)\| \, \|f(w)\| \, (v,w) = \|v\| \, \|w\| \, (f(v), f(w))$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Folgt direkt aus der Berechnung des Winkels. □

Satz 2.9. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive, lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist konforme Abbildung.*
2. *Es gibt eine Isometrie $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ein $\Omega > 0$, so dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$*

$$f(v) = \Omega I(v).$$

3. *Es gibt ein $\Omega > 0$, sodass*

$$(f(v), f(w)) = \Omega^2 (v, w).$$

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.
Induktion nach n. Der Fall ist klar für $n = 1$.
Angenommen die Behauptung ist für n gewiesen und es gilt $f \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ konform. Da konforme Abbildungen Winkel erhalten, ist die Menge

$$f(e_i), f(e_2), \ldots, f(e_{n+1})$$

orthogonale Menge. Es existiert also ein $\Omega > 0$ und eine Isometrie $I : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, so dass

$$\Omega I \circ f(e_{n+1}) = e_{n+1}.$$

Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $f(e_{n+1}) = e_{n+1}$. Insbesondere gilt aufgrund der konformität dann auch, dass $f(e_{n+1}^{\perp}) \subset e_{n+1}^{\perp}$.
Aus der Induktionsvorraussetzung folgt nun, dass

$$f|_{e_{n+1}^{\perp}} = wJe_{n+1}^{\perp} + e_{n+1}^{\perp}$$

für ein $w > 0$ und eine Isometrie J. Wir zeigen nun, dass $w = 1$.

$$\begin{aligned}
\|f(e_1 + e_{n-1})\| \, \|f(e_{n+1})\| \, (e_1 + e_{n+1}, e_{n+1}) &= \|f(e_1 + e_{n+1})\| \\
&= \sqrt{(f(e_1), f(e_1)) + (f(e_{n+1}), f(e_{n+1}))} \\
&= \sqrt{w^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt

$$\|e_1 + e_{n+1}\| \, \|e_{n+1}\| \, (f(e_1 + e_{n+1}), f(e_{n+1})) = \sqrt{2}(wJe_1 + e_{n+1}, e_{n+1}) = \sqrt{2}.$$

Durch Vergleich ergibt sich dann sofort $w = 1$.
2. $\Rightarrow$ 3.

$$(f(v), f(w)) = (\Omega I(v), \Omega I(w)) = \Omega^2 (I(v), I(w)) = \Omega^2 (v, w).$$

3. $\Rightarrow$ 1.
Folgt aus (2.8), da

$$\|f(v)\| \, \|f(w)\| \, (v, w) = \Omega^2 \, \|v\| \, \|w\| \, (v, w) = \|v\| \, \|w\| \, (f(v), f(w)).$$

□

3 Beispiele konformer Transformationen im $\mathbb{R}^{n,m}$

Wir beginnen mit einer Liste von Beispielen und werden nachprüfen, ob es sich um konforme Transformationen handelt.

Beispiel 3.1. 1. [T] Die Translation:

$$x \mapsto x + a.$$

2. [R] Die Rotation:

$$x \mapsto Rx,$$

wobei für die Rotationsmatrix R gelten muss, dass $R^t(g_{\mu\nu})R = (g_{\mu\nu})$.

3. [D] Die Dilatation:

$$x \mapsto \lambda x,$$

für ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

4. [I] Die Inversion:

$$U := \{x \in \mathbb{R}^{n,m} : g(x, x \neq 0\} \to U; \; x \mapsto \frac{x}{g(x,x)}.$$

Diese Abbildung ist natürlich nur für diejenigen $x \in \mathbb{R}^{n,m}$ definiert, für die gilt, dass $g(x,x) \neq 0$. Bei Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist durch $g(x,x) = 0$ nur der Ursprung beschrieben, bei pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist dies jedoch nicht der Fall. So ist zum Beispiel $(1,1)^t \in \mathbb{R}^{1,1}$ ein solcher Fall, denn es gilt

$$g((1,1)^t,(1,1)^t) = (1,1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(1,1)^t = (1,1)(1,-1)^t = 1-1 = 0.$$

Satz 3.2. *Die Abbildungen $[T]$ und $[R]$ sind lokale Isometrien, also konforme Transformationen mit konformen Faktor $\Omega = 1$.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition von $[T]$ und $[R]$. □

Bemerkung 3.3. Die konformen Transformationen $[T]$ und $[R]$ werden auch als Poincaré-Transformationen bezeichnet.
Allgemeine Poincaré-Transformationen sind Verknüpfungen von Rotationen und Translationen. Sie werden (R,a) geschrieben, wobei

$$(R,A)x = Rx + a$$

gilt.
Eine Komposition zweier allgemeiner Poincaré-Transformationen $(R_1,a_1),(R_2,a_2)$ ergibt wieder eine allgemeine Poincare-Transformation, denn es gilt

$$(R_1,a_1)(R_2,a_2)x = (R_1,a_1)(R_2x+a_2) = R_1R_2x+R_1A_2+a_2 = (R_1R_2,R_1a_2+a_1)x.$$

Satz 3.4. *Die Abbildungen $[D]$ und $[I]$ sind konforme Abbildungen mit dem konformen Faktoren $\Omega_D = |\lambda|$ und $\Omega_I = \left|\frac{1}{g(x,x)}\right|$.*

Beweis. Auch hier ist klar, dass $[D]$ eine konforme Transformation mit konformen Faktor $\Omega_D = \lambda$ ist.
Interessanter ist die Behauptung für $[I]$. Um diese zu zeigen, berechnen wir zuerst

$$\frac{\partial(I(x))_\mu}{\partial x_\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\frac{x_\mu}{g(x,x)} = \frac{1}{g(x,x)}\delta_{\mu\sigma} - \frac{2x_\mu g_{\sigma\tau}x_\tau}{g(x,x)^2}. \tag{1}$$

Hiermit folgt dann

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &\quad \frac{\partial(I(x))_\mu}{\partial x_\sigma}\frac{\partial(I(x))_\nu}{\partial x_\rho}\\
\stackrel{(1)}{=} &\quad g_{\mu\nu}(\frac{1}{g(x,x)}\delta_{\mu\sigma} - \frac{2x_\mu g_{\sigma\tau}x_\tau}{g(x,x)^2})(\frac{1}{g(x,x)}\delta_{\nu\rho} - \frac{2x_\nu g_{\rho\pi}x_\pi}{g(x,x)^2})\\
= &\quad g_{\mu\nu}(\frac{1}{g(x,x)^2}\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \frac{2x_\mu g_{\rho\pi}x_\pi\delta_{\mu\sigma}}{g(x,x)^3} - \frac{2x_\mu g_{\sigma\tau}x_\tau\delta_{\nu\rho}}{g(x,x)^3} + \frac{4x_\mu g_{\sigma\tau}x_\tau x_\nu g_{\rho\pi}x_\pi}{g(x,x)^4})
\end{aligned}$$

Die letzten drei Terme addieren sich zu Null.
Nach (2.5) wissen wir also, dass

$$\Omega^2(x) = \frac{1}{g(x,x)^2}.$$

□

Bemerkung 3.5. Für die Inversionsabbildung $[I]$ gilt, dass

$$I(I(x)) = I(\frac{x}{g(x,x)}) = \frac{\frac{x}{g(x,x)}}{g(\frac{x}{g(x,x)}, \frac{x}{g(x,x)})} = \frac{\frac{x}{g(x,x)}}{\frac{1}{g(x,x)^2} g(x,x)} = x,$$

also die Inversion auf sich selbst angewendet die Identität ergibt.

Beispiel 3.6. Als Komposition einer Inversion mit einer Translation und einer weiteren Inversion erhalten wir die sogenannte

1. $[S]$ Spezielle konforme Transformation:

$$x \mapsto I(T(I(x))).$$

Sie ist als Komposition von konformen Transformationen wieder eine konforme Transformation (2.3).

Bemerkung 3.7. $[S]$ lässt sich also schreiben als

$$\begin{aligned}
x \mapsto I(T(I(x))) &= I(T(\frac{x}{g(x,x)})) \\
&= I(\frac{x}{g(x,x)} + a) \\
&= I(\frac{x + g(x,x)a}{g(x,x)}) \\
&= \frac{\frac{x+g(x,x)a}{g(x,x)}}{g(\frac{x+g(x,x)a}{g(x,x)}, \frac{x+g(x,x)a}{g(x,x)})} \\
&= \frac{x + g(x,x)a}{g(x,x)\frac{1}{g(x,x)^2} g(x + g(x,x)a, x + g(x,x)a)} \\
&= \frac{x + g(x,x)a}{\frac{1}{g(x,x)}(g(x,x) + 2g(x,x)g(x,a) + g(x,x)^2 g(a,a)} \\
&= \frac{x + g(x,x)a}{1 + 2g(x,a) + g(x,x)g(a,a)}.
\end{aligned}$$

Literatur

[1] M. Schottenloher, *A mathematical introduction to conformal field theory*, volume 759 of Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, 2008.

[2] Ralph Blumenhagen und Eric Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory*, volume 779 of Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, 2009.

[3] Matthias Gaberdiel, *Konforme Feldtheorie*, Vorlesungsskript WS 2003/2004, 2004.