Seminar zum Thema von Neumann Algebren

29. Juni 2010

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Die Algebra $B(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$ enthält die Informationen über abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$ in Form von orthogonalen Projektionen $p \in B(\mathcal{H})$ mit $p^2 = p = p^*$. Hat das Bild von p endliche Dimension, dann stimmt diese mit der Spur $\mathrm{tr}(p)$ überein. Setzen wir im unendlichdimensionalen Fall $\mathrm{tr}(p) = \infty$, so erhalten wir das *diskrete* Dimensionsspektrum

$$\{\mathrm{tr}(p) \mid p \in B(\mathcal{H}), p \text{ Projektion}\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Interessant ist nun, dass es Unteralgebren von $B(\mathcal{H})$ gibt, die eine bis auf Normierung eindeutige Spur besitzen, deren Dimensionsspektrum aber *kontinuierlich* ist. Sei hierzu $A = M_2(\mathbb{C})$, die Algebra der komplexen 2×2-Matrizen. Auf diesen ist eine normierte Spur $\tau_0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}$ definiert. Die Einbettung $A \to A \otimes A$ mit $a \mapsto a \otimes 1$ ist spurerhaltend, falls die Spur auf $A \otimes A = M_4(\mathbb{C})$ ebenfalls auf 1 normiert wird. Sei $A_{n+1} = A_n \otimes A$ mit $A_1 = A$, dann erhalten wir spurerhaltende Einbettungen $A_n \to A_{n+1}$. Betrachte das unendliche Tensorprodukt, d.h. die $*$-Algebra $A_\infty = \bigcup_n A_n$. Die Spur auf den A_n induziert eine Spur auf A_∞. Sei $\mathcal{H} = L^2(A_\infty, \tau)$ der Hilbertraum, der sich als Abschluss von A_∞ unter der vom Skalarprodukt $\langle a, b \rangle = \tau(a^* b)$ ergibt, dann operiert A_∞ auf $\mathcal{H}$ und der Abschluss von A_∞ in der schwachen Topologie auf $B(\mathcal{H})$ ist die gesuchte Algebra M. Für diese gilt

$$\{\tau(p) \mid p \in M, p \text{ Projektion}\} = [0, 1] \ .$$

Solche schwach abgeschlossenen Unteralgebren von $B(\mathcal{H})$ heißen von Neumann Algebren und wurden unter dem Namen "Rings of Operators" als erstes von Murray und von Neumann im Jahr 1936 untersucht. In der Quantenmechanik entsprechen den Zuständen eines physikalischen Systems Vektoren des Hilbertraums, auf denen die observablen Größen in Form von Operatoren wirken. Von Neumann erkannte, dass der Hilbertraum für die Beschreibung dieses Systems nicht so entscheidend ist wie die Algebra, die von den Observablen erzeugt wird. Diese ist in vielen Modellen eine von Neumann Algebra und enthält nach den obigen Überlegungen auch die Information über Unterräume von $\mathcal{H}$. Von Neumann lieferte die ersten Klassifikationsresultate für diese Algebren und auch den Bikommutantensatz, der die schwache Abgeschlossenheit mit einer algebraischen Aussage identifiziert. Das zweite Anliegen von Murray und von Neumann war eine Verallgemeinerung der unitären Darstellungstheorie.

In der Tat liefert jede diskrete Gruppe Γ auf kanonische Weise eine zugehörige von Neumann Algebra $L(\Gamma)$. Insbesondere im Hinblick auf Fragen nach der

Amenabilität der Gruppe oder nach Gruppenwirkungen von Γ ist $L(\Gamma)$ ein interessantes, wenn auch sehr komplexes Objekt. Sei F_n die freie Gruppe in n Erzeugern, dann sei als Beispiel für diese Komplexität erwähnt, dass es ein offenes Problem ist, ob $L(F_2)$ und $L(F_3)$ isomorph sind, während für die zugehörigen Gruppenringe $\mathbb{C}F_2$ und $\mathbb{C}F_3$ leicht einzusehen ist, dass diese nicht isomorph sein können. Ein anderer überraschender Zusammenhang ergibt sich im Hinblick auf die oben konstruierte von Neumann Algebra M. Diese ist isomorph zu $L(\Sigma_\infty)$, wobei die unendliche Permutationsgruppe Σ_∞ aus jenen Permutationen von $\mathbb{N}$ besteht, die nur endlich viele Elemente vertauschen. Dieses Resultat ist eng verwoben mit der Frage nach der Klassifizierung der von Neumann Algebren. Weiterhin spielen von Neumann Algebren eine zentrale Rolle in der algebraischen Quantenfeldtheorie indem sie das Framework für eine Verschmelzung der quantenmechanischen Observablen mit dem Feldbegriff bereitstellen. In der algebraischen Topologie lassen sich mit ihrer Hilfe klassische Invarianten wie die Betti-Zahlen verallgemeinern zu den L^2-Invarianten, in deren Definition Moduln über von Neumann Algebren die Vektorräume der klassischen Theorie ersetzen.

Ziel dieses Seminars ist es, eine Einführung in die Theorie der von Neumann Algebren zu vermitteln und einen Ausblick auf einige der oben angesprochenen Anwendungen zu geben. Vorkenntnisse aus der Funktionalanalysis sind hilfreich, werden in den ersten Vorträgen des Seminars aber auch in knapper Form wiederholt. Die Eckpfeiler der Theorie – wie die Klassifizierung von Typ I, II und III-Faktoren und deren feinere Unterteilung – sollen ausführlicher diskutiert werden.

Themen

Grundlagen aus der Funktionalanalysis Hier soll an die Definition der Hilbert-Räume erinnert und einige Eigenschaften der beschränkten Operatoren $B(\mathcal{H})$ diskutiert werden. Insbesondere werden die verschiedenen Topologien auf $B(\mathcal{H})$ miteinander verglichen. Desweiteren benötigen wir den Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren aus der Funktionalanalysis, sowie die Polarzerlegung und Tensorprodukte von Hilberträumen.

von Neumann Algebren – Bikommutantensatz und Beispiele Die wohl wichtigste Charakterisierung einer von Neumann Algebra neben der Definition als schwach abgeschlossene Unteralgebra von $B(\mathcal{H})$ ist die folgende: Sei $M' \subset B(\mathcal{H})$ die Menge aller Operatoren in $B(\mathcal{H})$, die mit M kommutieren (die sogenannte Kommutante von M), dann ist $M \subset B(\mathcal{H})$ eine von Neumann Algebra genau dann, wenn $M = M'' = (M')'$ gilt. Der Beweis dieses Satzes lässt sich zunächst für den Fall $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ durchführen und dann auf $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ ausdehnen.

von Neumann Algebren – Gruppen-von Neumann Algebren Die bereits oben angesprochenen Gruppen-von Neumann Algebren $L(\Gamma)$ zu einer diskreten Gruppe Γ werden in diesem Vortrag eingeführt und für einfache Fälle wie $\Gamma = \mathbb{Z}$ konkreter beschrieben. Für den Fall $\Gamma = F_n$ besteht das oben definierte Dimensionsspektrum aus dem Intervall $[0, 1]$, eine Tatsache, die ebenfalls im Rahmen dieses Vortrags bewiesen wird.

von Neumann Algebren – elementare Eigenschaften Anders als die meisten C^*-Algebren enthalten von Neumann Algebren sehr viele Projektionen, sie werden sogar vollständig durch diese Elemente erzeugt. Eine abelsche von Neumann Algebra braucht lediglich einen selbstadjungierten Erzeuger. Diese und andere fundamentale Eigenschaften sind Thema dieses Vortrags.

Klassifikation von Typ I - Faktoren Ein erster Schritt in Richtung einer Klassifizierung von von Neumann Algebren soll im Rahmen dieses Vortrags getan werden. Wieder spielen die Projektionen in der Algebra M eine zentrale Rolle. Es lässt sich eine Halbordnung auf ihnen definieren und die Typ I-Algebren entsprechen gerade jenen, für die ein minimales Element existiert. Wir werden sehen, dass in solchen Fällen M eine Zerlegung besitzt, deren Bausteine entweder Matrixalgebren sind oder $B(\widetilde{\mathcal{H}})$ für einen Hilbertraum $\widetilde{\mathcal{H}}$ ist.

Projektionen in von Neumann Algebren und deren Halbordnung Die Bedeutung der Projektionen für die Klassifizierung der Algebra M ist bereits in den früheren Vorträgen evident gewesen. Hier soll jetzt die Struktur des Gitters der Projektionen weiter untersucht werden. Mit Hilfe der Partialordnung, die auf Faktoren (d.h. zentrumsfreien Algebren) sogar eine Ordnung ist, lassen sich von Neumann Algebren weiter in endliche und unendliche Algebren einteilen. Typ II_1-von Neumann Algebren sind zwar unendlich*dimensional*, aber endlich im Sinne der Klassifizierung. Sie entstehen vorzugsweise als Gruppen-von Neumann Algebren und bilden eine sehr interessante Unterklasse innerhalb der Theorie.

GNS-Konstruktion und normale Zustände In diesem Vortrag werden wir sehen, warum die eingangs beschriebene Algebra, die aus dem unendlichen Tensorprodukt entsteht, tatsächlich ein Typ II_1-Faktor ist. Wir lernen hierbei eine neue Konstruktion kennen, die aus einer $*$-Algebra A zusammen mit einem positiven linearen Funktional $\omega\colon A \to \mathbb{C}$, das $\omega(a^*) = \overline{\omega(a)}$ erfüllt, eine Darstellung π_ω von A auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_\omega$ liefert, die nach Gelfand, Naimark und Segal *GNS-Darstellung* heisst. Besonders interessant ist für uns natürlich der Fall: $A = M$ eine von Neumann Algebra mit $\omega = \mathrm{tr}$ einer Spur auf M. Für den Fall das keine Spur auf M existiert, sind wir gezwungen, allgemeinere positive lineare Funktionale zu verstehen. Eine wichtige Klasse bilden die sogenannten normalen Zustände auf M, die wir im zweiten Teil des Vortrags einführen wollen.

Das Prädual Die im vorherigen Vortrag definierten normalen Zustände auf M formen einen abgeschlossenen Unterraum M_* im Dualraum M^* von M. Die injektive Abbildung $M \to M^{**}$ von M in sein Bidual schickt den Banachraum M nun erstaunlicherweise gerade auf $(M_*)^*$, daher heisst M_* auch das Prädual von M. Nach einem Theorem von Sakai sind von Neumann Algebren gerade diejenigen C^*-Algebren, die so ein Prädual besitzen. Den letzten Satz werden wir wohl nicht beweisen, uns aber trotzdem mit den Eigenschaften der normalen Zustände auseinandersetzen.

Die Standardform von Typ II_1- und Typ II_∞-Faktoren Die GNS-Konstruktion liefert zu einer Typ II_1 von Neumann Algebra M mit Spur tr einen Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathrm{tr}}$, der auch mit $L^2(M, \mathrm{tr})$ oder einfach nur $L^2(M)$ bezeichnet wird. $L^2(M)$ mit der Wirkung von M heisst auch die *Standardform* von M, die Thema dieses Vortrages ist. Es lassen sich auch entsprechende L^p-Räume definieren, so dass $L^1(M) = M_*$ und $L^\infty(M) = M$ gilt. Sei M' die Kommutante von M in $L^2(M)$, dann ist eine interessante Eigenschaft der Standardform, dass es eine antiunitäre Isometrie $J\colon L^2(M) \to L^2(M)$ gibt, so dass $JMJ = M'$. Somit ist die Kommutante eines II_1-Faktors wieder ein II_1-Faktor. Diese Abbildung J ist auch der Ausgangspunkt für die Tomita-Takesaki-Theorie. Wir werden in diesem Zusammenhang auch eine weitere Sorte von Neumann Algebren, nämlich diejenigen vom Typ II_∞ kennenlernen.

Moduln über von Neumann Algebren und ihre Dimension Ein Modul über einer Typ II_1 von Neumann Algebra M mit Spur tr ist ein Hilbertraum H mit einer (ultra-schwach stetigen) Linkswirkung von M. Ist H separabel, dann haben solche Moduln eine Dimension $\dim_M(H)$, die, weil sie über tr definiert wird, positive reelle Werte oder ∞ annimmt. $\dim_M(H)$ heisst – vor allen Dingen in physikalischer Literatur – auch Kopplungskonstante von H. In diesem Vortrag sollen die Eigenschaften von $\dim_M(H)$ geklärt und Beispiele betrachtet werden.

Gruppenwirkungen und verschränktes Produkt – Definition Wirkt eine Gruppe G durch Automorphismen auf einer von Neumann Algebra M, dann lässt sich eine neue von Neumann Algebra $M \rtimes G$ konstruieren, die $g \in G$ in Form von unitären Elementen u_g enthält. Diese neue Algebra heisst auch verschränktes Produkt. Ist $G \ni g \mapsto \alpha_g \in \mathrm{Aut}(M)$ die Gruppenwirkung, dann gilt in $M \rtimes G$: $u_g x u_g^* = \alpha_g(x)$. In diesem Vortrag soll $M \rtimes G$ definiert und in Beispielen berechnet werden. Interessant sind hierbei insbesondere sogenannte freie, ergodische Gruppenwirkungen. Es stellt sich dann nämlich heraus, dass $M \rtimes G$ in diesem Fall ein Faktor ist.

Der Typ des verschränkten Produktes Sei X ein G-Raum mit einem Maß μ, so dass die Wirkung von G die Maßklasse von μ erhält, dann lässt sich das verschränkte Produkt der kommutativen von Neumann Algebra $L^\infty(X, \mu)$ mit G betrachten. Wir werden sehen, dass sich der Typ von $L^\infty(X, \mu) \rtimes G$ bestimmen lässt. Bestimmte Gruppenwirkungen auf Maßräumen (X, μ) erlauben kein σ-endliches G-invariantes Maß, welches absolut stetig bezüglich μ ist. In diesem Fall ist $L^\infty(X, \mu) \rtimes G$ weder vom Typ I, noch vom Typ II, d.h. wir stoßen hier auf eine neue Klasse von von Neumann Algebren.

Tomita-Takesaki Theorie – ein Überblick Die Motivation für die Tomita-Takesaki Theorie haben wir bereits in einem früheren Vortrag kennengelernt, in dem es um eine antiunitäre Isometrie $J\colon L^2(M, \mathrm{tr}) \to L^2(M, \mathrm{tr})$ ging, die die bemerkenswerte Eigenschaft $JMJ = M'$ besaß. Es stellt sich die Frage, ob eine solche Abbildung auch noch existiert, falls wir nicht mehr die GNS-Darstellung der Spur betrachten, sondern einen anderen Zustand ω auf M. Ist ω ein treuer, normaler Zustand, dann besitzt die GNS-Darstellung $\mathcal{H}_\omega$ einen zyklischen, separierenden Vektor Ω und $S(x\Omega) = x^*\Omega$ ist ein unbeschränkter (antilinearer) Operator auf $\mathcal{H}_\omega$. Dessen Polarzerlegung $S = J\Delta^{1/2}$ enthält tatsächlich einen antiunitären Operator J mit derselben Eigenschaft wie im Fall $\omega = \mathrm{tr}$. Δ hingegen induziert Automorphismen von M via $\Delta^{it} M \Delta^{-it}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Anwendungen von von Neumann Algebren – ein Überblick Ein Anwendungsgebiet der von Neumann Algebren ist die algebraische Quantenfeldtheorie, die ein mathematisch rigoroses Modell für die Vereinigung von klassischen Feldtheorien mit der Quantenmechanik geben möchte. Wie oben bereits angedeutet, ist der Raum der Zustände in der Quantenmechanik ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, auf dem die Observablen als selbstadjungierte Operatoren wirken. In der Quantenfeldtheorie sind die Observablen abhängig vom Gebiet der Raumzeit, in dem sie gemessen werden. Raumartig zueinander gelegene Messungen dürfen sich nach dem Kausalitätsprinzip nicht beeinflussen. Sinnvoll scheint daher die Forderung, dass die entsprechenden Observablen miteinander kommutieren. Dies führt auf den Begriff des lokalen Netzes von Operatoralgebren. Es stellt sich nun heraus, dass die lokalen Algebren unter relativ natürlichen Voraussetzungen automatisch von Neumann Algebren sind. Dieser letzte Vortrag möchte eine kleinen Einblick in die Theorie der Netze von Operatoralgebren geben.

Literatur

[1] Blackadar, Bruce. *Operator algebras. Theory of C^*-algebras and von Neumann algebras.* Springer-Verlag Berlin, 2006

[2] Jones, Vaughan F.R. *Von Neumann Algebras.* Lecture Notes from `http://www.math.berkeley.edu/~vfr/MATH20909/VonNeumann2009.pdf`

[3] Kadison, Richard V.; Ringrose, John R. *Fundamentals of the theory of operator algebras I, II.* AMS, 1997

[4] Takesaki, Masamichi. *Theory of operator algebras I, II und III.* Springer-Verlag Berlin, 2002/2003