GNS-Konstruktion und normale Zustände

1 Rückblick

Wir betrachten von-Neumann-Algebren $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, d.h. Unteralgebren mit $1_{\mathcal{H}} \in M$, die in der schwachen Operatortopologie (und damit in jeder der anderen) abgeschlossen sind. Es gilt $M = M''$. Ein Faktor ist eine von-Neumann-Algebra M mit trivialem Zentrum $Z(M) = \mathbb{C}$. Von-Neumann-Algebren werden durch ihre Projektionen $p \in M$ erzeugt. Für Projektionen p, q hatten wir die Halbordnung $p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad p\mathcal{H} \subset q\mathcal{H}$ erklärt. Ein Faktor mit einem minimalen Projektor heißt Typ-I-Faktor. Jeder Typ-I-Faktor ist unitär äquivalent zu $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ für einen Hilbert-Raum $\mathcal{K}$. Über partielle Isometrien wurde eine weitere Ordnung der Projektionen erklärt als $p \preceq q \quad \Leftrightarrow \quad \exists u$ partielle Isometrie mit $uu^* = p$ und $u^*u \leq q$ sowie eine Äquivalenz $p \approx q \quad \Leftrightarrow \quad \exists u$ partielle Isometrie mit $uu^* = p$ und $u^*u = q$. Zwei beliebige Projektionen in einem Faktor sind vergleichbar, $p \preceq q$ oder $q \preceq p$ mit $p \approx q$ wenn sowohl $p \preceq q$ als auch $q \preceq p$. Ein Typ-II_1-Faktor ist ein unendlich-dimensionaler Faktor mit einer positiven σ-schwach-stetigen Spur $\mathrm{tr} \neq 0$. Diese ist dann automatisch treu und eindeutig bis auf Normierung. Die Spur liefert einen Isomorphismus der totalgeordneten Menge der Äquivalenzklassen von Projektionen in Typ-II_1-Faktor mit dem Intervall $[0, \mathrm{tr}(1)]$.

2 Beispiel für einen Typ-II_1-Faktor

Es wurden bereits die Gruppen-von-Neumann-Algebren $vN(\Gamma)$ für eine diskrete Gruppe Γ vorgestellt. Für $\Gamma = F_n$ (die freie Gruppe) gab es eine Spur, die die Menge der Projektionen surjektiv auf $[0, 1]$ abbildet. Es stellt sich heraus, daß $vN(F_n)$ ein Typ-II_1-Faktor ist für $n \geq 2$.

Es soll hier ein weiteres Beispiel eines Typ-II_1-Faktors konstruiert werden. Dazu sei $A_1 = M_2(\mathbb{C})$ und dann rekursiv $A_{n+1} = A_n \otimes A_1$, wobei $A_n \subset A_{n+1}$ als Einbettung durch Diagonalmatrizen $A_n \ni a \equiv a \otimes 1 \in A_{n+1}$ betrachtet wird. Sei $A_\infty = \bigcup_n A_n$ das unendliche Tensorprodukt. Elemente $b \in A_\infty$ sind Linearkombinationen von Tensoren $a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_k \otimes 1 \otimes \dots$ mit $a_i \in A_1$. Die normierte Spur $\mathrm{tr} = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}$ auf A_1 induziert eine normierte Spur auf A_{n+1} durch $\mathrm{tr}(b \otimes a) := \mathrm{tr}(b)\,\mathrm{tr}(a)$, mit $b \in A_n$ und $a \in A_1$. Diese Spur ist kompatibel mit der Einbettung $A_n \subset A_{n+1}$, und tr ist auf A_n identisch mit der normierten Spur auf $M_{2^n}(\mathbb{C})$. Somit wird durch $\mathrm{tr}(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots) := \prod_{i=1}^\infty \mathrm{tr}(a_i)$ eine normierte, positive und treue Spur auf A_∞ induziert.

Wir können $A_\infty \subset \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{C}^2))$ auffassen und dann bezüglich der schachen Operatortopologie zu einem Typ-I-Faktor vervollständigen. Für $a \in A_\infty$ sein $\|a\|_{op}$ die zugehörige Operatornorm. Unter Verwendung der Spur auf A_∞ werden wir eine andere Vervollständigung von A_∞ zu einem Typ-II_1-Faktor M konstruieren.

Durch $\langle x, y\rangle := \mathrm{tr}(y^*x)$ wird ein Skalarprodukt auf A_∞ erklärt (da tr auf A_∞

treu ist, gilt $\langle x, x\rangle = 0$ genau für $x = 0$). Sei $\mathcal{H}$ die L^2-Vervollständigung von A_∞ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$. Für $x \in A_\infty$ ist $x^*x \leq \|x\|_{op}^2 1$, damit $y^*x^*xy \leq \|x\|_{op}^2 y^*y$ und schließlich $\mathrm{tr}(y^*x^*xy) \leq \|x\|_{op}^2 \mathrm{tr}(y^*y)$. Interpretiert man $y, L_x(y) := xy \in \mathcal{H}$, dann bedeutet das $\|L_x(y)\| \leq \|x\|_{op}\|y\|$ für die Normen in $\mathcal{H}$, so daß sich L_x eindeutig zu einem beschränkten linearen Operator $L_x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ fortsetzt mit $\|L_x\|_{op} \leq \|x\|_{op}$. Wegen $\langle x, L_z(y)\rangle = \langle x, zy\rangle = \mathrm{tr}((zy)^*x) = \mathrm{tr}(y^*z^*x) = \langle z^*x, y\rangle = \langle L_{z^*}x, y\rangle$ ist $(L_z)^* = L_{z^*}$, somit ist $L : A_\infty \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine injektive Darstellung der $*$-Algebra A_∞. Sei $M = (L(A_\infty))''$ der schwache Abschluß.

Wir betrachten $1 \in A_\infty \subset \mathcal{H}$ als Vektor $\xi \in \mathcal{H}$, mit $\langle \xi, \xi\rangle = \mathrm{tr}(1) = 1$. Dann ist $\langle L_a(\xi), \xi\rangle = \mathrm{tr}(a)$ für $a \in A_\infty$. Entsprechend definieren wir $\mathrm{tr} : M \to \mathbb{C}$ durch

$$\mathrm{tr}(a) := \langle a(\xi), \xi\rangle\ , \qquad a \in M\ .$$

Sei (a_α) ein Netz in A_∞, deren Linksmultiplikationen in der σ-schwachen Topologie gegen $a \in M$ konvergiert, d.h. $\sum_n \langle L_{a_\alpha} x_n, y_n\rangle \to \sum_n \langle a(x_n), y_n\rangle$ für alle $(x_n), (y_n) \in \ell^2(\mathcal{H})$. Dann konvergiert insbesondere $\langle L_{a_\alpha}\xi, \xi\rangle$ gegen $\langle a(\xi), \xi\rangle$, d.h. $\mathrm{tr} : M \to \mathbb{C}$ ist σ-schwach-stetig.

Damit verbleibt für den Beweis, daß M ein Typ-II_1-Faktor ist, noch zu zeigen, daß $\mathrm{tr} : M \to \mathbb{C}$ treu auf M ist. Dazu benötigen wir die Kommutante, die durch Rechtsmultiplikation $R_a(x) = xa$ auf A_∞ entsteht. Analog zu oben setzt sich R_a eindeutig zu einem beschränkten linearen Operator $R_a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ fort. Da R_a mit L_b auf A_∞ kommutiert, kommutiert M als schwacher Abschluß von $L_(A_\infty)$ mit jedem R_a auf $\mathcal{H}$.

Sei $b \in M$ mit $\mathrm{tr}(b^*b) = 0$, dann gilt für alle $x \in A_\infty \subset \mathcal{H}$

$$\|b(x)\|^2 = \|b(R_x\xi)\|^2 = \|R_x(b\xi)\|^2 \leq \|x\|_{op}^2 \|b\xi\|^2 = \|x\|_{op}^2 \cdot \mathrm{tr}(b^*b) = 0$$

so daß sich b zum Operator $0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ fortsetzt. Somit ist $\mathrm{tr} : M \to \mathbb{C}$ treu und M ein Typ-II_1-Faktor.

3 Die GNS-Darstellung

Die Konstruktion des Typ-II_1-Faktors zu A_∞ hat entscheidend Gebrauch gemacht von einer engen Verbindung von Algebra und Hilbert-Raum: Es gab einen Vektor $\xi \in \mathcal{H}$, so daß sowohl $L(A)\xi$ als auch $R(A)\xi$ dicht in $\mathcal{H}$ sind.

Definition 1 Sei $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra. Ein Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ heißt

- *zyklisch für* M, falls $\overline{M\xi} = \mathcal{H}$, und
- *separierend für* M, wenn aus $x\xi = 0$ für $x \in M$ folgt $x = 0$.

Satz 2 *Ein Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ ist genau dann zyklisch für M, wenn ξ separierend für M' ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Für jeden Vektor $v \in \mathcal{H}$ gibt es eine Folge (a_n) in M, so daß $a_n(\xi) \in \mathcal{H}$ gegen v konvergiert. Ist $x \in M'$ mit $x(\xi) = 0$, dann konvergiert $x(a_n(\xi)) = a_n(x(\xi)) = 0$ gegen $xv = 0$, d.h. $x = 0 \in M'$.

($\Leftarrow$) Sei p die Projektion auf $\mathcal{K} = \overline{M\xi}$, dann gilt für beliebige $v \in \mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{K}$ sowie $a \in M$ die Beziehung

$$\langle p(a(v)), x\rangle = \langle a(v), p(x)\rangle = \langle a(v), x\rangle = \langle v, a^*(x)\rangle = \langle v, p(a^*(x))\rangle = \langle a(p(v)), x\rangle ,$$

also $ap = pa$ da $x \in \mathcal{K}$ beliebig. Somit ist $p \in M'$ und $(1-p)\xi = 0$, also $p = 1$. $\square$

Lemma 3 *Sei A eine C^*-Algebra und $\phi : A \to \mathbb{C}$ ein lineares positives Funktional. Dann gilt für alle $a, b \in A$*

i) $|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(b^*b)\phi(a^*a)$ *(Cauchy-Schwarz).*

ii) *Ist $a = a^* \in A$ selbstadjungiert, so ist $\phi(a) \in \mathbb{R}$.*

iii) $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$.

iv) *Ist $1 \in A$, dann ist ϕ norm-stetig mit $\|\phi\| \leq \phi(1)$.*

v) *Ist $1 \in A$, so gilt $\phi(a^*b^*ba) \leq \|b\|^2\phi(a^*a)$.*

Beweis.

i) Wie üblich über $\phi\big((a+\lambda b)^*(a+\lambda b)\big) \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

ii) Über den Spektralsatz konstruiert man Zerlegung $a = a_+ - a_-$ mit $a_+, a_- \geq 0$. Dann ist $\phi(a) = \phi(a_+) - \phi(a_-) \in \mathbb{R}$

iii)

$$\begin{aligned}\phi(a^*) &= \phi(\tfrac{a^*+a}{2} + \tfrac{ia^*-ia}{2i}) = \tfrac{1}{2}\phi(a^*+a) + \tfrac{1}{2i}\phi(ia^*-ia)\\ &= \overline{\tfrac{1}{2}\phi(a^*+a) - \tfrac{1}{2i}\phi(ia^*-ia)} = \overline{\phi(\tfrac{a^*+a}{2} - \tfrac{ia^*-ia}{2i})} = \overline{\phi(a)}\end{aligned}$$

iv) $|\phi(a)|^2 = |\phi(a1)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(1)$ sowie $a^*a \leq \|a\|^2 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(a^*a) \leq \|a\|^2\phi(1)$. Somit $\|\phi\| = \sup_{a\in A, \|a\|=1} |\phi(a)| \leq \phi(1)$, Supremum wird für $a = 1$ angenommen.

v) $\tilde{\phi}(b) := \phi(a^*ba)$ ist positiv, also $\tilde{\phi}(b^*b) \leq \|b\|^2\tilde{\phi}(1)$. $\square$

Sei $\phi : A \to \mathbb{C}$ ein lineares positives Funktional auf einer C^*-Algebra A. Dann definiert $\langle a, b\rangle := \phi(b^*a)$ eine Sesquilinearform auf A, im allgemeinen aber kein Skalarprodukt. Jedoch folgt mit $N_\phi := \{x \in A \;:\; \phi(x^*x) = 0\}$ und Cauchy-Schwarz $\langle x, a\rangle = 0$ für alle $x \in N_\phi$ und $a \in A$, so daß $\langle\;,\;\rangle$ zu einem Skalarprodukt auf A/N_ϕ wird. Insbesondere ist $\langle y+x, y'+x'\rangle = \langle y, y'\rangle$ für $y, y' \in A/N_\phi$ und $x, x' \in N_\phi$ unabhängig vom Repräsentanten. Sei $\mathcal{H}_\phi = \overline{A/N_\phi}$ der zugehörige L^2-Abschluß.

Ist $1 \in A$ und $\pi_\phi(a)y := ay$ für $a \in A$ und $y \in A/N \subset \mathcal{H}_\phi$. Nach Lemma 3.i) ist $\pi_\phi(a)x \in N_\phi$ für $x \in N_\phi$, so daß $\pi_\phi : A \times A/N_\phi \to A/N_\phi$ wohldefiniert ist, außerdem beschränkt nochmals nach Lemma 3.v). Somit setzt sich $\pi_\phi(a)$ zu einem linearen beschränkten Operator auf $\mathcal{H}_\phi$ fort. Es gilt

$$\langle y, \pi_\phi(a^*)z\rangle = \langle y, a^*z\rangle = \phi(z^*ay) = \langle ay, z\rangle = \langle \pi_\pi(a)y, z\rangle$$

für alle $y, z \in A/N_\phi$, somit $\pi_\phi(a^*) = (\pi_\phi(a))^*$. Folglich ist die Gelfand-Naimark-Segal-Darstellung $\pi_\phi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$ ein $*$-Homomorphismus von C^*-Algebren.

Es wird nicht behauptet, daß $\pi_\phi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$ treu ist. Unter Verwendung von

Lemma 4 *Sei $a \in A$ und $\sigma \in sp(a)$. Dann gibt es ein normiertes positives lineares Funktional ρ auf A mit $\rho(a) = \sigma$.*

kann man nach geeigneter Summierung über alle normierten GNS-Darstellungen zeigen:

Theorem 5 (Gelfand-Naimark) *Jede C^*-Algebra besitzt eine treue Darstellung, insbesondere ist jede C^*-Algebra norm-abgeschlossene Unteralgebra in einem geeigneten $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

4 Normale Zustände

Sei $M \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra. Dann ist $M^* = \{\phi : M \to \mathbb{C} \text{ linear+stetig}\}$ der Dualraum. Im nächsten Vortrag wird diskutiert, daß es einen Banach-Raum M_* gibt, das Prädual, mit $(M_*)^* = M$. Wegen $M_* \subset (M_*)^{**} = M^*$ ist das Prädual eine Teilmenge des Dualraums von M. Es wird sich zeigen, daß diese Teilmenge durch die *normalen Zustände* auf M gegeben sind.

Definition 6 Ein positives lineares Funktional ϕ auf einer von-Neumann-Algebra M M heißt

i) *Zustand*, falls $\phi(1) = 1$.

ii) *Vektor-Zustand*, falls es einen Einheitsvektor $\xi \in \mathcal{H}$ gibt mit $\phi(a) = \omega_\xi(a) := \langle a\xi, \xi\rangle$ für alle $a \in M$.

iii) *vollständig additiv*, wenn für eine beliebige Familie p_α paarweise orthogonaler Projektionen gilt
$$\phi\Big(\bigvee_\alpha p_\alpha\Big) = \sum_\alpha \phi(p_\alpha)\ .$$

iv) *normal*, wenn für jedes norm-beschränkte, monoton wachsende Netz (a_α) selbstadjungierter Operatoren $a_\alpha \in M$ mit kleinster oberer Schranke a gilt $\omega(a_\alpha) \to \omega(a)$.

Die Definition von 'normal' folgt [4, Def. 7.1.11]. Nach dem Theorem von Vigier [1, Thm. 3.4.2] konvergiert (a_α) gegen a in der starken Topologie. Zentrales Ziel ist der Beweis des folgenden

Theorem 7 ([1, Thm. 7.1.3]) *Für einen Zustand ϕ auf einer von-Neumann-Algebra M auf $\mathcal{H}$ sind äquivalent:*

i) *ϕ ist normal.*

ii) *ϕ ist vollständig additiv.*

iii) *Es gibt einen Einheitsvektor $\xi = (\xi_n)$ in $\ell^2(\mathcal{H})$, so daß $\phi = \sum_n \omega_{\xi_n}$.*

iv) *ϕ ist σ-schwach stetig.*

Beweis. i)$\Rightarrow$ii) Seien $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$ paarweise orthogonale Projektionen und $p = \bigvee_\alpha p_\alpha = \sum_\alpha p_\alpha$. Für endliche Teilfamilien $F \subset I$ gilt $\phi(\sum_{\alpha\in F} p_\alpha) = \sum_{\alpha\in F} \phi(p_\alpha)$. Die monoton wachsenden Netze $\sum_{\alpha\in F} p_\alpha$ endlicher Teilfamilien haben p als kleinste obere Schranke. Ist ϕ normal, so konvergiert $\Big(\sum_{\alpha\in F} \phi(p_\alpha)\Big)_{F\subset I}$ gegen $\phi(p)$.

iii)$\Rightarrow$iv) Sei $a_\alpha \to a$ in der σ-schwachen Topologie, d.h. für beliebige $\xi = (\xi_n) \in \ell^2(\mathcal{H})$ und $\eta = (\eta_n) \in \ell^2(\mathcal{H})$ gilt $\sum_{n=0}^\infty \langle a_\alpha \xi_n, \eta_n\rangle \to \sum_{n=0}^\infty \langle a\xi_n, \eta_n\rangle$. Insbesondere konvergiert für Einheitsvektoren $\eta = \xi$ dann $\sum_{n=0}^\infty \omega_{\xi_n}(a_\alpha)$ gegen $\sum_{n=0}^\infty \omega_{\xi_n}(a)$.

iv)$\Rightarrow$i) Das monoton wachsende und beschränkte Netz (a_α) selbstadjungierter Operatoren konvergiert nach dem Theorem von Vigier in der starken Topologie gegen $a \in M$. Auf beschränkten Teilmengen stimmen die starke und die σ-starke Topologie überein, so daß (a_α) auch in der σ-starken Topologie gegen a konvergiert. Der σ-schwach-stetige Zustand ϕ ist automatisch σ-stark-stetig, also konvergiert $\phi(a_\alpha)$ gegen $\phi(a)$.

Es verbleibt ii)$\Rightarrow$iii).

Der letzte (und wichtige) Teilschritt des Beweises in [1] ist falsch und kann nicht repariert werden. Die ersten Teilschritte beweisen aber iv)$\Rightarrow$iii), falls [1, Ex. 5.1.2] bereitsteht. Wir holen zunächst diesen Beweis nach in Verallgemeinerung von [1, Thm. 5.1.1]:

Lemma 8 ([1, Ex. 5.1.2]) *Sei $V \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein linearer Teilraum und $\phi : V \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Dann sind äquivalent:*

i) *Es gibt Vektoren $\xi = (\xi_i) \in \ell^2(\mathcal{H})$ und $\eta = (\eta_i) \in \ell^2(\mathcal{H})$ mit*

$$\phi(a) = \sum_{i=0}^\infty \langle a\xi_i, \eta_i\rangle \qquad \forall a \in V \ .$$

ii) *ϕ ist σ-schwach-stetig.*

iii) *ϕ ist σ-stark-stetig.*

Beweis. i)⇒ii)⇒iii) ist klar, verbleibt iii)⇒i).

Da ϕ σ-stark-stetig ist, gibt es eine σ-stark-offene Umgebung von $0 \in V$, deren Bild unter ϕ enthalten ist in der offenen Einheitskugel in $\mathbb{C}$. Insbesondere gibt es ein $\epsilon > 0$ und ein $\xi = (\xi_i) \in \ell^2(\mathcal{H})$, so daß für alle $b \in V$ mit $\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|b\xi_i\|^2} < \epsilon$ gilt $|\phi(b)| < 1$. Sei $a \in V$ gegeben. Ist $\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|a\xi_i\|^2} = 0$, dann folgt $|\phi(na)| < 1$ für alle $n > 0$, somit $\phi(a) = 0$. Ist $\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|a\xi_i\|^2} \neq 0$, dann setze $b := \dfrac{\epsilon' a}{\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|a\xi_i\|^2}}$ für ein $0 < \epsilon' < \epsilon$. Dann gilt $\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|b\xi_i\|^2} = \epsilon' < \epsilon$, also $|\phi(b)| < 1$ und somit

$$|\phi(a)| = \left|\phi\Big(\frac{\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|a\xi_i\|^2}}{\epsilon'} b\Big)\right| = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|a\xi_i\|^2}}{\epsilon'} |\phi(b)|$$

und schließlich für $\epsilon' \to \epsilon$

$$|\phi(a)| \leq \frac{1}{\epsilon}\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|a\xi_i\|^2}\ .$$

Nach Einschluß des Falls $\sqrt{\sum_{i=0}^\infty \|a\xi_i\|^2} = 0$ bleibt diese Abschätzung gültig für alle $a \in V$.

Sei $\mathcal{K}_\xi = \{(a\xi_i) \ : \ a \in V\} \subset \ell^2(\mathcal{H})$. Dann definiert $\tilde{\phi}((a\xi_i)) := \phi(a)$ ein lineares Funktional auf $\mathcal{K}_\xi$. Nach Konstruktion gilt $|\tilde{\phi}(\kappa)| \leq \frac{1}{\epsilon}\|\kappa\|$ für $\kappa \in \mathcal{K}_\xi$, somit setzt sich $\tilde{\phi}$ zu einem linearen stetigen Funktional auf den L^2-Abschluß $\overline{\mathcal{K}_\xi}$ fort. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es einen Vektor $\eta = (\eta_i) \in \overline{\mathcal{K}_\xi} \subset \ell^2(\mathcal{H})$, so daß

$$\phi(a) = \tilde{\phi}((a\xi_i)) = \langle (a\xi_i), (\eta)_i \rangle_{\overline{\mathcal{K}_\xi}} = \sum_{i=0}^\infty \langle a\xi_i, \eta_i \rangle\ . \qquad \square$$

Lemma 9 ([1, Lem. 7.1.4]) *Sei A eine unitale C^*-Algebra dargestellt auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Ist ψ ein positives lineares Funktional auf A und $\xi \in \mathcal{H}$ ein Vektor mit $\psi \leq \omega_\xi$, d.h. $\omega_\xi - \psi$ ist positiv, dann gibt es ein $s \in A'$ mit $\psi = \omega_{s\xi}$.*

Beweis. Definiere eine Sesquilinearform $(\ ,\ )$ auf $A\xi$ durch $(a\xi, b\xi) = \psi(b^*a)$. Nach Cauchy-Schwarz ist

$$|(a\xi, b\xi)|^2 \leq \psi(a^*a)\psi(b^*b) \leq \omega_\xi(a^*a)\omega_\xi(b^*b) = \|a\xi\|^2\|b\xi\|^2\ ,$$

so daß sich $(\ ,\ )$ zu einer Sesquilinearform auf dem GNS-Hilbert-Raum $\mathcal{H}_{\omega_\xi}$ fortsetzt. Dann wird durch $(b\xi, a\xi) =: \langle b\xi, ta\xi\rangle$ ein linearer beschränkter Operator auf $\mathcal{H}_{\omega_\xi}$ definiert. Denn sei (η_i) eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_{\omega_\xi}$, dann ist

$$\begin{aligned}(b\xi, a\xi) &= \sum_{i,j} \big(\langle b\xi, \eta_j\rangle\eta_j, \langle a\xi, \eta_i\rangle\eta_i\big) = \sum_{i,j} \langle b\xi, \eta_j\rangle\langle \eta_i, a\xi\rangle(\eta_j, \eta_i) \\ &= \Big\langle b\xi, \sum_{i,j} \eta_j(\eta_j, \eta_i)\langle \eta_i, a\xi\rangle \Big\rangle\ .\end{aligned}$$

Komplexe Konjugation von $(b\xi, a\xi) =: \langle b\xi, ta\xi\rangle$ und vertauschen von a, b liefert $\langle b\xi, ta\xi\rangle = \langle tb\xi, a\xi\rangle$, d.h. t ist selbstadjungiert. Wegen $\langle a\xi, ta\xi\rangle \geq 0$ für alle $a\xi$ ist t positiv. Außerdem gilt

$$\langle b\xi, tca\xi\rangle = \psi(a^*c^*b) = (c^*b\xi, a\xi) = \langle c^*b\xi, ta\xi\rangle = \langle b\xi, cta\xi\rangle$$

d.h. $t \in A'$ auf $\mathcal{H}$. Mit $s = \sqrt{t}$ folgt

$$\psi(a) = (a\xi, \xi) = \langle a\xi, t\xi\rangle = \langle sa\xi, s\xi\rangle = \langle as\xi, s\xi\rangle = \omega_{s\xi}(a) \ . \qquad \square$$

Lemma 10 ([1, Cor. 7.1.5]) *Seien $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ derart, daß $\omega(a) = \langle a\xi, \eta\rangle$ ein positives lineares Funktional auf einer C^*-Algebra A auf $\mathcal{H}$ ist. Dann gibt es ein $\nu \in \mathcal{H}$ mit $\omega = \omega_\nu$.*

Beweis. Für $a \geq 0$ gilt

$$\omega(a) = \langle a\xi, \eta\rangle = \frac{1}{4}\langle a(\xi+\eta), \xi+\eta\rangle - \frac{1}{4}\langle a(\xi-\eta), \xi-\eta\rangle \leq \frac{1}{4}\langle a(\xi+\eta), \xi+\eta\rangle \ .$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 9. $\square$

Folgerung 11 *In Theorem 7 gilt iv)⇒iii).*

Beweis. Die von-Neumann-Algebra M ist C^*-Algebra auf $\mathcal{H}$. Diese wird auch zu einer C^*-Algebra auf dem amplifizierten Hilbert-Raum $\ell^2(\mathcal{H})$. Durch Kombination von Lemma 8 mit Lemma 10 folgt die Behauptung. $\square$

Damit verbleibt der Beweis von ii)⇒iv) in Theorem 7 (In [1] wird direkt ii)⇒iii) versucht).

Lemma 12 ([1, Lem. 7.1.6]) *Seien ϕ_1, ϕ_2 vollständig additive positive Funktionale auf einer von-Neumann-Algebra M und $p \in M$ eine Projektion mit $\phi_1(p) < \phi_2(p)$. Dann gibt es eine Projektion $q \leq p$ mit $\phi_1(a) < \phi_2(a)$ für alle $M \ni a > 0$ mit $qaq = a$.*

Beweis. Sei (e_α) eine maximale Familie paarweise orthogonaler Projektionen $e_\alpha \leq p$ mit $\phi_1(e_\alpha) \geq \phi_2(e_\alpha)$. Setze $q := p - \sum_\alpha e_\alpha \leq p$. Wegen der vollständigen Additivität ist dann auch $\phi_1(\sum_\alpha e_\alpha) \geq \phi_2(\sum_\alpha e_\alpha)$, insbesondere $q \neq 0$. Wegen der Maximalität der Familie ist $\phi_1(f) < \phi_2(f)$ für alle Projektionen $0 < f \leq q$. Unter Verwendung des Spektralsatzes für $0 \leq a \in qMq$ und der Norm-Stetigkeit der ϕ_i folgt $\phi_1(a) \leq \phi_2(a)$ für alle $0 \leq a \in qMq$. $\square$

Lemma 13 ([1, Lem. 7.1.7]) *Sei ϕ ein vollständig additiver Zustand auf M. Dann gibt es eine Projektion $p > 0$ in M und ein $\xi \in \mathcal{H}$, so daß $\phi(a) = \langle a\xi, \xi\rangle$ für alle $a \in pMp$.*

Beweis. Wähle ein $\tilde{\xi} \in \mathcal{H}$ mit $\phi(1) = 1 < \langle 1\tilde{\xi}, \tilde{\xi}\rangle$. Das positive lineare Funktional $\phi_2(a) = \langle a\xi, \xi\rangle$ ist (z.B. nach den bisher bewiesenen Implikationen iii)⇒iv)⇒i)⇒ii) von Theorem 7 erweitert auf nicht-normierte ϕ) vollständig additiv. Nach Lemma 12 gibt es eine Projektion $0 < p \leq 1$, so daß $\phi(a) \leq \langle a\tilde{\xi}, \tilde{\xi}\rangle$ für alle $0 \leq a \in pMp$. Nach Lemma 9 gibt es ein $\xi = s\tilde{\xi} \in \mathcal{H}$, mit $s \in (pMp)'$, so daß $\phi(a) = \omega_\xi(a)$ für alle $a \in pMp$. □

Die folgende Argumentation ist der korrekte Teil des Beweises in [1].

Lemma 14 *Sei ϕ ein vollständig additiver Zustand auf einer von-Neumann-Algebra M über $\mathcal{H}$. Dann gibt es eine abzählbare Familie von Projektionen (p_i) in M und zugehörige Vektoren $\xi_i \in \mathcal{H}$, so daß*

i) *$\phi(p_i a p_i) = \langle a\xi_i, \xi_i\rangle$ für alle $a \in M$ and $i \in \mathbb{N}$.*

ii) *$\phi(\sum_i p_i) = \sum_i \phi(p_i) = 1$, insbesondere $\sum_i \|\xi_i\|^2 = 1$*

Beweis. Durch wiederholte Anwendung von Lemma 13 auf das jeweilige orthogonale Komplement konstruiert man eine Familie p_α paarweise orthogonaler Projektionen und zugehörige Vektoren $\xi_\alpha \in p_\alpha\mathcal{H}$, so daß für die Einschränkung ϕ_α von ϕ auf $p_\alpha M p_\alpha$ gilt $\phi(a) = \langle a\xi_\alpha, \xi_\alpha\rangle$. Sei nun (p_α) eine maximale Familie solcher Projektionen. Dann ist $\sum_\alpha p_\alpha = 1$, denn sonst gäbe es nach Lemma 13 eine weitere Projektion. Für jedes p_α dieser maximalen Familie gilt $\phi(p_\alpha) = \|\xi_\alpha\|^2$. Da ϕ ein vollständig additiver Zustand ist, gilt $\sum_\alpha \|\xi_\alpha\|^2 = \sum_\alpha \phi(p_\alpha) = \phi(1) = 1$. Jedoch kann $\|\xi_\alpha\|^2$ nur dann in $\mathbb{C}$ summierbar sein, wenn es höchstens abzählbar viele $\|\xi_\alpha\|^2$ ungleich null sind, und damit höchstens abzählbar viele $p_\alpha \neq 0$. Wir können deshalb annnehmen, daß $(p_\alpha) = (p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ abzählbar ist. □

Der nächste Schritt in [1] ist fehlerhaft. Wir nutzen stattdessen [4].

Folgerung 15 ([4, Lem. 7.1.4]) *Sei ϕ ein vollständig additives positives lineares Funktional auf M. Dann ist ϕ stark-stetig auf beschränkten Teilmengen von M.*

Beweis. Seien (p_i) und (ξ_i) wie in Lemma 14. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\phi(\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i) \leq \frac{\epsilon^2}{4}$. Dann gilt für alle $a \in M$ mit

i) $\|a\|_{op} < 1$

ii) $\|a\xi_n\| < \frac{\epsilon}{2N}$ für alle $n = 0, \ldots, N$

folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\phi(a)|^2 \leq \phi(a^*a) &= \phi\Big(a^*a \sum_{i=0}^{N} p_i\Big) + \phi\Big(a^*a \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{N} \phi(a^*ap_i) + \phi\Big(a^*a \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i\Big) . \end{aligned}$$

Weiter gilt nach Cauchy-Schwarz, d.h. Lemma 3.i), und Lemma 14

$$
\begin{aligned}
|\phi(a^*ap_i)| &= |\phi(|a||a|p_i)| \le \sqrt{\phi(|a|^2)}\sqrt{\phi(p_i|a|^2p_i)} = \sqrt{\phi(|a|^2)}\sqrt{\langle |a|^2\xi_i, \xi_i\rangle} \\
&\le \|a\|\|a\xi_i\| \le \|a\xi_i\| \le \frac{\epsilon}{2N} .
\end{aligned}
$$

Im zweiten Term haben wir

$$
\Big|\phi\Big(a^*a \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i\Big)\Big| \le \sqrt{\phi(a^*aa^*a)}\sqrt{\phi\Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} p_i\Big)} \le \|a\|^2\sqrt{\frac{\epsilon^2}{4}} \le \frac{\epsilon}{2} .
$$

Insgesamt ist $|\phi(a)| \le \epsilon$ gezeigt. Die Eigenschaften i) und ii) besagen dann, daß ϕ auf *beschränkten* Teilmengen von M ein *stark-stetiges* lineares Funktional ist. □

Die verbliebene Implikation ii)⇒iv) in Theorem 7 folgt nun aus dem folgenden Satz.

Satz 16 ([3, Chap. II, Thm. 2.6.ii)]) *Sei M eine von-Neumann-Algebra auf $\mathcal{H}$ und $M_1 = \{a \in M \ : \ \|a\|_{op} \le 1\}$. Für ein lineares positives Funktional ϕ auf M sind äquivalent:*

i) *ϕ ist σ-stark stetig auf M*

ii) *ϕ ist stark stetig auf M_1*

Beweis. i)⇒ii) Insbesondere ist ϕ auch σ-stark-stetig auf M_1, dann stark-stetig nach Thm. 1.7 im 2. Vortrag.

ii)⇒i) ?????

Literatur

[1] V. F. R. Jones, “Von Neumann Algebras,” script available at `http://math.berkeley.edu/~vfr/`.

[2] J. Dixmier, “C^*-algebras,” North-Holland (1977).

[3] M. Takesaki, “Theory of Operator Algebras I,” Springer-Verlag (1979).

[4] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, “Fundamentals of the Theory of Operator Algebras II,” American mathematical Society (1997).