GRUPPENWIRKUNGEN UND VERSCHRÄNKTES PRODUKT

DANIEL KASPROWSKI

Zusammenfassung. Wirkt eine Gruppe G durch Automorphismen auf einer von Neumann Algebra M, dann lässt sich eine neue von Neumann Algebra $M \rtimes G$ konstruieren, die $g \in G$ in Form von unitären Elementen u_g enthält. Diese neue Algebra heißt auch verschränktes Produkt. Ist $G \ni g \mapsto \alpha_g \in Aut(M)$ die Gruppenwirkung, dann gilt in $M \rtimes G$:

$$u_g x u_g^* = \alpha_g(x)$$

In diesem Vortrag soll $M \rtimes G$ definiert und in Beispielen berechnet werden. Interessant sind hierbei insbesondere sogenannte freie, ergodische Gruppenwirkungen. Es stellt sich dann nämlich heraus, dass $M \rtimes G$ in diesem Fall ein Faktor ist.

Motivation

Ein nützlicher Weg um aus gegebenen von Neumann Algebren neue zu erstellen, ist das verschränkte Produkt.
Wirkt eine Gruppe G durch Automorphismen auf einer Algebra A, so lässt sich der Vektorraum der endlichen formalen Linearkombinationen

$$\sum_{g \in G} a_g u_g$$

mit $a_g \in A$ bilden. Durch $u_g u_h = u_{gh}$ und $u_g a u_g^{-1} = g(a)$ wird eine Multiplikation auf diesem Vektorraum definiert. In Anlehnung an das semidirekte Produkt zweier Gruppen bezeichnen wir die so definierte Algebra mit $A \rtimes G$. $A \rtimes G$ heißt das verschränkte Produkt.
Das verschränkte Produkt ist in folgendem Sinne universell:
Wirkt A auf einem Vektorraum V und $g \mapsto v_g$ ist eine Darstellung von G mit $v_g a v_g^{-1} = g(a)$, dann lässt sie die Wirkung von A zu einer Wirkung von $A \rtimes G$ erweitern, wobei u_g mittels v_g wirkt.
In diesem Vortrag soll nun das verschränkte Produkt für von Neumann Algebren definiert werden.

1. Gruppenwirkungen

Definiton 1.1. Sei M eine von Neumann Algebra und G eine Gruppe. Eine *Wirkung* von G auf M ist ein Homomorphismus $G \to AutM, g \mapsto \alpha_g$. (Dabei seien Automorphismen ultraschwach stetig).
Die Algebra der Fixpunkte M^G ist wieder eine von Neumann Algebra.
Sei $g \mapsto u_g$ eine unitäre Darstellung von G auf $\mathcal{H}$, M eine von Neumann Algebra

Date: 14. Januar 2011.

über $\mathcal{H}$ und $u_g M u_g^* = M, \forall g \in G$. Dann liefert $\alpha_g(x) := u_g x u_g^*$ eine Wirkung von G auf M (und M'). Die Wirkung α heißt *implementiert* durch die unitäre Darstellung u_g. Gilt $u_g \in M, \forall g \in G$ dann heißt die Wirkung *innere Wirkung*, da die inneren Automorphismen von M per Definition von der Form $\mathrm{Ad}u(x) = uxu^*$ für $u \in M$ unitär sind.
Ein Automorphismus heißt *äußerer Automorphismus*, falls er kein innerer Automorphismus ist.
Nicht jede Wirkung ist implementierbar, obwohl die Definition vom Hilbertraum, auf dem M wirkt, abhängt.

Beispiel 1.2. Ist (X, μ) ein Maßraum, T eine Maßklasse erhaltende Bijektion auf X, d.h. $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \mu(T^{-1}(A)) = 0$, für alle messbaren $A \subseteq X$. Dann definiert T einen Autormorphismus α_T auf $L^\infty(X, \mu)$ durch $\alpha_T(f) = f \circ T$.

Beweis. Da T eine Maßklasse erhaltende Bijektion ist, ist α_T offensichtlich surjektiv. Seien $f, g \in L^\infty(X, \mu)$ und $A := \{x \in X \mid f(x) - g(x) \neq 0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \circ T = g \circ T &\Rightarrow \mu(T^{-1}(A)) = 0 \\ &\Rightarrow \mu(A) = 0 \\ &\Rightarrow f = g \end{aligned}$$

Also ist α_T auch injektiv.

□

Definiton 1.3. Eine Bijektion wie oben heißt *ergodisch*, falls aus $T(A) = A$ für eine messbare Menge $A \subseteq X$ folgt, dass $\mu(A) = 0$ oder $\mu(X \backslash A) = 0$.

Proposition 1.4. *Mit den Notationen wie oben ist T ergodisch, genau dann, wenn die einzigen Fixpunkte von α_T die konstanten Funktionen sind.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei $f \in L^\infty$ und $\alpha_T(f) = f$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$ nach der Definition des essentiellen Supremums $\mu(\{x \mid ||f||_\infty - |f(x)| < \epsilon\}) \neq 0$. Diese Menge ist invariant unter T also gleich X (bis auf eine Nullmenge). Lassen wir ϵ gegen Null gehen, gilt also $\mu(\{x \mid ||f||_\infty \neq |f(x)|\} = 0$. Also können wir annehmen, dass $f(x) = e^{ig(x)}$ für eine messbare Funktion g die Werte in $[0, 2\pi)$ annimmt. Wiederholen wir das Argument für g, so erhalten wir, dass f fast überall konstant ist.
„$\Leftarrow$“ Ist A eine messbare, invariante Menge, so ist die charakteristische Funktion von A ein Fixpunkt von α_T. □

Definiton 1.5. Ist G eine topologische Gruppe, dann gibt es viele mögliche Definitionen von Stetigkeit. Die nützlichste ist die von *punktweiser *-starker Stetigkeit*, d.h. dass die Abbildung $g \mapsto \alpha(g)x$ *-stark stetig ist, für alle $x \in M$. Wenn wir von der Wirkung einer topologischen Gruppe sprechen, nehmen wir immer punktweise *-starke Stetigkeit an.

Beispiel 1.6. Die Wirkung von $\mathbb{R}$ auf $L^\infty(\mathbb{R})$ ist punktweise stark stetig, punktweise *-stark stetig, aber nicht punktweise normstetig.

Beweis. Sei $\alpha_r(f)(x) = f(x + r)$.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 0$ für $x < 0$ und auf $[n-1, n]$ durch $f(x) = 1$

falls $nx \mod 2 \in [0,1]$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann gilt $||\alpha_{\frac{1}{n}} f - f||_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Wirkung nicht normstetig.
Ist $f \in L^\infty(\mathbb{R}), g \in L^2(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\int_n^\infty |g^2| dx + \int_{-\infty}^{-n} |g^2| dx < \epsilon$. Auf $[-n, n]$ lassen sich f, g beliebig gut durch stetige Funktionen approximieren, also geht $\int_{-n}^{n} \overline{f(x+r) - f(x+r')g(x)}(f(x+r) - f(x+r'))g(x)dx$ gegen Null für $r - r' \to 0$. Also ist die Wirkung stark-stetig. Wegen $\alpha_r(f)^* = \alpha_r(\overline{f})$ ist die Wirkung damit auch *-stark stetig. □

Bemerkung 1.7. Wirkungen einer gegeben Gruppe auf einer von Neumann Algebra sind leicht zu konstruieren, aber Wirkungen einer Gruppe auf einer gegebenen von Neumann Algebra können schwer zu finden sein.

Definiton 1.8. Eine Wirkung von G auf M heißt ergodisch, falls $M^G = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$.

Beispiel 1.9. Wirkt G Maßklasse erhaltend auf (X, μ), dann ist die induzierte Wirkung von G auf $L^\infty(X, \mu)$ genau dann ergodisch, wenn für alle messbaren Teilmengen $A \subseteq X$ mit $g(A) = A$ für alle $g \in G$ entweder $\mu(A) = 0$ oder $\mu(X \backslash A) = 0$ gilt.

Beweis. Der Beweis geht analog zum Beweis von Proposition 1.4. □

Bemerkung 1.10. Die folgende Frage ist ein noch offenes Problem:
Hat $SU(3)$ eine ergodische Wirkung auf einem Typ II_1 Faktor?
Es ist bekannt, dass $SU(2)$ keine solche Wirkung hat und dass falls eine kompakte Gruppe ergodisch auf einer von Neumann Algebra wirkt, die von Neumann Algebra eine treue, normale Spur hat.

2. Das verschränkte Produkt

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, M eine von Neumann Algebra auf $\mathcal{H}$, G eine lokal-kompakte Gruppe, mit Haarmaß dg und α eine Wirkung von G auf M. Betrachte den Hilbertraum $\mathcal{K} := L^2(G, \mathcal{H}) = L^2(G) \otimes \mathcal{H}$ und G wirke auf $\mathcal{K}$ durch $u_g = \lambda_g \times 1$, wobei λ die linksreguläre Darstellung ist. Weiterhin wirke $x \in M$ auf $\mathcal{K}$ durch

$$(\tilde{x}f)(g) := (\alpha_{g^{-1}}(x))(f(g)) \quad \forall g \in G$$

Proposition 2.1. *Die Zuordnung $x \mapsto \tilde{x}$ ist ein ultraschwach stetiger *-Isomorphismus von M in eine Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ und es gilt $u_g \tilde{x} u_g^* = \widetilde{\alpha_g(x)}$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle f \mid \widetilde{x^* g} \right\rangle &= \int_G \langle f(h) \mid \alpha_{h^{-1}}(x^*) g(h) \rangle \, dh \\
&= \int_G \langle \alpha_{h^{-1}}(x) f(h) \mid g(h) \rangle \, dh \\
&= \langle \tilde{x} f \mid g \rangle
\end{aligned}$$

Also ist die Zuordnung ein *-Homomomorphismus.
Seien $x, y \in M$ mit $||xh - yh|| > \epsilon$ für ein $h \in \mathcal{H}, \epsilon > 0$. Da die Wirkung *-stark

stetig ist, gibt es eine Umgebung U von $1 \in G$ mit $||\alpha_{g^{-1}}(x)(h) - \alpha_{g^{-1}}(y)(h)|| > \frac{\epsilon}{2}$ für alle $g \in U$. Definiere $f \in \mathcal{K}$ durch $f := h \cdot \mathbb{1}_U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||(\tilde{x} - \tilde{y})f|| &= \int_G ||\alpha_{g^{-1}}(x-y)f(g)||dg \\ &> \frac{\epsilon}{2} \int_G \mathbb{1}_U dg > 0 \end{aligned}$$

Also ist die Zuordnung injektiv und damit ein *-Isomorphismus.
Seien $(f_i)_i, (h_i)_i \in l^2(\mathcal{K})$. Dann sind $(f_i(g))_i, (h_i(g))_i$ aus $l^2(\mathcal{H})$ für fast alle $g \in G$. Konvergiere nun x_λ ultraschwach gegen x, dann konvergiert auch $\alpha_g(x_\lambda)$ ultraschwach gegen $\alpha_g(x)$ für alle $g \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle (\tilde{x} - \tilde{x}_\lambda) f_i, h_i \rangle| &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_G \left\langle \alpha_{g^{-1}}(x - x_\lambda) f_i(g) \mid h_i(g) \right\rangle dg \right| \\ &\leq \int_G \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left\langle \alpha_{g^{-1}}(x - x_\lambda) f_i(g) \mid h_i(g) \right\rangle \right| dg \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0 \end{aligned}$$

Also ist die Zuordnung ultraschwach stetig.
Es gilt für alle $h \in G, f \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} (u_g \tilde{x} u_g^*)(f)(h) &= (u_g \tilde{x}) f(g^{-1}h) \\ &= u_g(\alpha_{h^{-1}g}(x) f)(g^{-1}h) \\ &= \alpha_{h^{-1}} \alpha_g(x) f(h) \\ &= \widetilde{\alpha_g(x)} f(h) \end{aligned}$$

□

Insbesondere liefert dies eine Möglichkeit eine Gruppenwirkung implementierbar zu machen, zumindest für eine lokal-kompakte Gruppe.

Definiton 2.2. Für $M, \mathcal{H}, \mathcal{K}$ und α wie oben ist das *verschränkte Produkt* $M \rtimes_\alpha G$ die von Neumann Algebra auf $\mathcal{K}$ erzeugt von $\{u_g \mid g \in G\}$ und $\{\tilde{x} \mid x \in M\}$.

Von nun an werden wir ˜ weglassen und M mit $\tilde{M}$ identifizieren.
Die endlichen Linearkombinationen $\sum_{g \in G} x_g u_g$ bilden eine dichte *-Unteralgebra von $M \rtimes_\alpha G$. Dabei sind die u_g linear unabhängig über M, in dem Sinne, dass aus $\sum_{g \in G} x_g u_g = 0$ folgt $x_g = 0$ für alle $g \in G$. Diese dichte Unteralgebra könnte als algebraisches verschränktes Produkt bezeichnet werden.

Für den Fall, dass G kompakt oder abelsch ist, gibt es schon viele Ergebnisse über $M \rtimes_\alpha G$. Wir werden uns jedoch hauptsächlich mit dem Fall beschäftigen, dass G diskret ist. In diesem Fall können wir uns wie für Gruppen von Neumann Algebren $vN(\Gamma)$ die Elemente als Matrizen vorstellen. ($vN(\Gamma)$ ist der Spezialfall des verschränkten Produkts mit $M = \mathbb{C}$ und trivialer Gruppenwirkung). Für G diskret definiert jedes Element aus $M \rtimes_\alpha G$ eine Funktion $g \mapsto x_g$, so dass die Summe $\sum_{g \in G} x_g u_g$ für eine Matrix von Operatoren auf $\mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes l^2(G)$ steht. Außerdem ist jede solche Matrix die einen beschränkten Operator auf $\mathcal{K}$ definiert in

$M \rtimes_\alpha G$.
Mittels Matrixmultiplikation lassen sich folgende Gleichungen beweisen:

$$\left(\sum x_g u_g\right)^* = \sum \alpha_g(x_{g^{-1}}) u_g \tag{1}$$

$$\left(\sum x_g u_g\right)\left(\sum y_g u_g\right) = \sum_g \left(\sum_h x_h \alpha_h(y_{h^{-1}g})\right) u_g \tag{2}$$

Definiton 2.3. Eine Wirkung α von G auf M heißt *äußere Wirkung*, wenn α_g nur für $g = 1$ ein innerer Autormorphismus ist.

Lemma 2.4. *Sei $\alpha \in AutM$ für einen Faktor M. Falls ein $x \in M, x \neq 0$ existiert mit*

$$yx = x\alpha(y) \quad \forall y \in M$$

dann ist α ein innerer Automorphismus.

Beweis. Falls x unitär ist, gilt die Aussage per Definition. Mit y^* statt y und adjungieren erhalten wir: $x^*y = \alpha(y)x^*$. Also

$$yxx^* = x\alpha(y)x^* = xx^*y$$

Also ist $xx^* \in M'$ und analog $x^*x \in M'$. Da xx^* und x^*x immer das gleiche Spektrum haben und M ein Faktor ist, sind xx^* und x^*x beide gleich derselben positiven Zahl λ. Dividieren durch $\sqrt{\lambda}$ macht x unitär und die Behauptung ist bewiesen. □

Proposition 2.5. *Sei G diskret und α eine äußere Wirkung von G auf einem Faktor M, dann ist $M \rtimes_\alpha G$ ein Faktor mit $M' \cap M \rtimes_\alpha G = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$.*

Beweis. Sei $x = \sum x_g u_g \in Z(M \rtimes_\alpha G)$. Da x und M kommutieren liefert Koeffizientenvergleich bei Gleichung (2), dass $yx_g = x_g\alpha_g(y)$ für alle $y \in M, g \in G$. Wegen dem vorherigen Lemma gilt also $x_g = 0$ für $g \neq 1$. Also ist $x \in M$. Da M ein Faktor ist, sind wir fertig. □

Definiton 2.6. Ein Automorphismus α einer von Neumann Algebra M heißt *frei*, falls gilt:

$$yx = x\alpha(y) \forall y \in M \;\Rightarrow\; x = 0$$

Eine Wirkung heißt frei, falls α_g für alle $g \neq 1$ frei ist.

Der Beweis von Proposition 2.5 zeigt, dass falls α eine freie Wirkung auf einer von Neumann Algebra M ist, dann $Z(M \rtimes_\alpha G) \subseteq M$ und $M' \cap M \rtimes_\alpha G \subseteq M$.

Satz 2.7. *Sei α eine freie ergodische Wirkung von G auf M, dann ist $M \rtimes_\alpha G$ ein Faktor.*

Beweis. Ist $x \in M \cap (M \rtimes_\alpha G)'$, so gilt $xu_g = u_g x = \alpha_g(x)u_g$, also $x \in M^G$. Wegen obiger Bemerkung gilt also $(M \rtimes \alpha G)' \cap (M \rtimes_\alpha G) \subseteq M^G$ und da α ergodisch ist, gilt $M^G = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$. Also ist $M \rtimes_\alpha G$ ein Faktor. □

Um zu verstehen, was es für einen Autormorphismus der Form α_T bedeutet frei zu sein, benötigen wir eine Annahme an (X, μ), da sich ansonsten ein T konstruieren ließe, so dass T auf X nicht trivial ist, aber α_T die Identität ist.
Im Folgenden sei also (X, μ) immer seperabel, d.h. es gibt eine Folge B_n von

messbaren Mengen mit $\mu(B_n) > 0$ und so, dass für alle $x \neq y$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x \in B_n, y \notin B_n$. Offensichtlich ist $\mathbb{R}^n$ seperabel.

Proposition 2.8. *Ist (X, μ) seperabel, T wie bisher und $\alpha_T = \mathrm{id}$, dann gilt $Tx = x$ fast überall.*

Beweis. Sei $A := \{x \mid Tx \neq x\}$. Dann gilt $A = \bigcup_n (A \cap (B_n \backslash T^{-1}(B_n)))$. Angenommen $\mu(A) \neq 0$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A \cap (B_n \backslash T^{-1}(B_n))) \neq 0$. Es gilt für alle $x \in A \cap (B_n \backslash T^{-1}(B_n))$, dass $1 = \mathbb{1}_{B_n}(x) = \mathbb{1}_{B_n}(Tx) = 0$. Also muss gelten $\mu(A) = 0$. □

Proposition 2.9. *Ist (X, μ) ein seperabler Maßraum, T eine Maßklasse erhaltende Bijektion auf X, dann ist α_T genau dann frei, wenn $\mu(\{y \mid T(x) = x\}) = 0$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei A messbar und $T|_A = \mathrm{id}_A$. Dann gilt $\mathbb{1}_A f = \alpha_T(f)\mathbb{1}_A$ für alle $f \in L^\infty(X, \mu)$.
„$\Leftarrow$“ Sei $f_1 \in L^\infty(X, \mu)$ mit $f_1 f_2 = \alpha_T(f_2) f_1$ für alle $f_2 \in L^\infty(X, \mu)$. Sei A der Träger von f_1. Da T keine Fixpunkte hat, gilt $A = \bigcup_n (A \cap (B_n \backslash T^{-1}(B_n)))$. Angenommen $f_1 \neq 0$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A \cap (B_n \backslash T^{-1}(B_n))) \neq 0$. Setze $f_2 = \mathbb{1}_{B_n}$. Dann gilt für alle $x \in A \cap (B_n \backslash T^{-1}(B))$, dass $f_1(x) f_2(x) \neq 0$, aber $f_2(Tx) f_1(x) = 0$, da $x \notin T^{-1}(B_n)$. Also muss gelten $\mu(A) = 0$. □

Bemerkung 2.10. Ist Γ eine abzählbare Gruppe, die frei, ergodisch und Maßklasse erhaltend auf einem Maßraum (X, μ) wirkt, so ist $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ ein Faktor und $L^\infty(X, \mu)$ ist maximal abelsch im verschränkten Produkt. Ist nämlich $L^\infty(X, \mu) \subseteq A \subseteq L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ und A abelsch, so ist insbesondere $A \subseteq (L^\infty(X, \mu))' \cap L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma \subseteq L^\infty(X, \mu)$, also $A = L^\infty(X, \mu)$.

Definiton 2.11. Das verschränkte Produkt $M \rtimes \Gamma$ mit M abelsch und Γ diskret heißt *Gruppen Maßraum Konstruktion.*

Beispiel 2.12. $X = \mathbb{Z}, \Gamma = \mathbb{Z}$ wirkend durch Translation und μ das Zählmaß. Die Wirkung ist frei und ergodisch und $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma = \mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z}))$.

Beispiel 2.13. Die irrationale Rotationsalgebra: $(X, \mu) = (\mathbb{T}^1, d\theta), \Gamma = \mathbb{Z}$ erzeugt durch die Transformation T mit $T(z) = e^{i\alpha} z$ für $\frac{\alpha}{2\pi}$ irrational.
Die Ergodizität kann z.B. mit Fourieranalysis gezeigt werden.

Nun noch einige weitere Beispiele ohne das die Ergodizität gezeigt werden soll:

Beispiel 2.14. $SL(2, \mathbb{Z})$ wirkt auf $\mathbb{R}^2$ durch lineare Transformationen.

Beispiel 2.15. $SL(2, \mathbb{Z})$ wirkt auf $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

Beispiel 2.16. $PSL(2, \mathbb{Z})$ wirkt auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch gebrochen lineare Transformation, d.h. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$. Dabei ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \infty = \frac{a}{c}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (-\frac{d}{c}) = \infty$.

Beispiel 2.17. $\mathbb{Q}$ wirkt auf $\mathbb{R}$ durch Translation.

Beispiel 2.18. Die “$ax + b$“ Gruppe $\mathbb{Q} \rtimes \mathbb{Q}^*$ wirkt auf $\mathbb{R}$.

In dem Beispielen gab es vier verschiedene Arten von freien, ergodischen Wirkungen:
Typ I: Γ wirkt transitiv Bsp:2.12.
Typ II_1: Γ erhält ein endliches Maß. Bsp:2.13,2.15.
Typ II_∞: Γ erhält ein unendliches Maß. Bsp:2.14,2.17.
Typ III: Γ erhält kein zu μ äquivalentes Maß. Bsp:2.16,2.18.