Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 08/09**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 20.11.08, bis 14h00 in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Man zeige, daß die durch $F(x,y) := (e^{x+y}, xe^y)$ definierte Abbilding $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lokal in einer Umgebung von $(0,0)$ ein Diffeomorphismus ist und bestimme die Taylorentwicklung der Umkehrabbildung $G = F^{-1}$ in $(1,0)$ bis zur Ordnung $|\alpha| \leq 2$.

Aufgabe 2. Man bestimme alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $f(x,y) := x + xy + y^2$, und untersuche, ob es sich auch um globale Extrema handelt.

Aufgabe 3. Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\| < 1\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \prod_{i=1}^n x_i^2$.
Zeige: f besitzt in U kein lokales Maximum.

Aufgabe 4. Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ bijektiv und stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$.

Zeige: Ist f eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung, so ist f^{-1} ebenfalls k-mal stetig differenzierbar.

Hinweis: Man betrachte

$$D(f^{-1}) = (Df)^{-1} \circ f^{-1} : V \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

und beweise: Ist f^{-1} eine l-mal stetig differenzierbare Abbildung mit $1 \leq l < k$, so ist f^{-1} auch $(l+1)$-mal stetig differenzierbar.