Überblick

1. Semester: *Grundlagen der Analysis*
2. Semester: *Lineare Algebra*
3. Semester: *Höherdimensionale Differential- und Integralrechnung*

Inhalt des 1. Semesters

Teil I:	Grundlagen
Teil II:	Folgen und Reihen
Teil III:	Funktionen, Stetigkeit
Teil IV:	Differentialrechnung
Teil V:	Integralrechnung

Literatur

[1] O. Forster, “Analysis 1,” Vieweg (2006).
[2] K. Königsberger, “Analysis 1,” Springer (2004).

Teil I
Grundlagen

1 Mathematische Beweise

Die Mathematik basiert auf einer Reihe von Axiomen, d.h. als “wahr” angenommenen Grundaussagen, aus denen dann durch logische Verknüpfungen weitere Aussagen *bewiesen*, d.h. als “wahr” erkannt werden. Eine mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch, niemals beides.

Sei B eine mathematische Aussage (z.B. $5 > 2$). Um zu beweisen, daß B wahr ist, ist eine bereits als wahr erkannte Aussage A zu suchen, aus der B folgt (geschrieben: $A \Rightarrow B$). Meist sind in Beweisen mehrere Aussagen zu verknüpfen.

Definition 1.1 Es seien A, B Aussagen. Dann werden Verknüpfungen $A \wedge B$ (*und*), $A \vee B$ (*oder*), $\neg A$ (*nicht*), $A \Rightarrow B$ (*folgt*) und $A \Leftrightarrow B$ (*äquivalent*) definiert durch die *Wahrheitstafel*

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
w	w	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	f	w	w	w

In der Analysis müssen wir entsprechende Verknüpfungen für Mengen von Aussagen untersuchen. Dazu einige Bezeichnungen für Mengen: Endliche Mengen kann man durch eine vollständige Liste ihrer Elemente angeben, Schreibweise $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Dabei ist die Reihenfolge beliebig, und das gleiche Element darf nicht mehrmals auftreten. Die x_i, $i = 1, \dots, n$, heißen *Elemente* der Menge X, Schreibweise $x_i \in X$. Wenn x kein Element von X ist, schreiben wir $x \notin X$. Die *leere Menge* $\varnothing$ enthält kein Element. Eine Menge Y heißt *Teilmenge* einer Menge X, wenn für jedes Element $y \in Y$ gilt $y \in X$. Ist $Y \subset X$, dann ist das Komplement $X \setminus Y$ definiert als die Menge der $x \in X$ mit $x \notin Y$. Das *direkte Produkt* von Mengen $X_1, \dots, X_n$ ist erklärt als die Menge aller geordneten n-Tupel:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \ : \ x_i \in X_i\} \ .$$

Speziell schreiben wir $X^n := \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$.

Viele der Konstruktionen aus endlichen Mengen lassen sich auch auf unendliche Mengen übertragen. Wir benötigen vor allem folgende Zahlbereiche: die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots, \}$ der natürlichen Zahlen, die Menge $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ der ganzen Zahlen, die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sowie die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Wir werden später im Detail darauf eingehen und insbesondere auch die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen definieren.

Definition 1.2 (für alle; es gibt) Es sei I eine beliebige Indexmenge und $\{A_i \,:\, i \in I\}$ ein System von Aussagen.

i) Die Aussage ($\forall i \in I$ gilt A_i) ist wahr genau dann, wenn alle Aussagen A_i wahr sind.

ii) Die Aussage ($\exists i \in I$ mit A_i) ist wahr genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen A_i wahr ist.

Also ist $\forall$ die Verallgemeinerung von $\wedge$ und $\exists$ die Verallgemeinerung von $\vee$. Einige Folgerungen aus der Definition sind:

- $(A \wedge B) \Rightarrow A \vee B$
- $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $(\neg A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

Die letzte Eigenschaft ist die Grundlage des *indirekten Beweises*: Um B zu beweisen, suchen wir eine falsche Aussage A und zeigen, daß A aus der Verneinung von B folgt, also $\neg B \Rightarrow A$.

Beispiel 1.3 (Irrationalität von $\sqrt{2}$) Es sei B die Aussage: $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. Wir gehen von der Negation $\neg B$ aus: Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre eine rationale Zahl, also $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$. Durch Kürzen kann erreicht werden, daß p oder q ungerade ist. Es gilt $2 = (\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $p^2 = 2q^2$. Damit ist p^2 und dann auch p gerade. Somit ist nach Voraussetzung q ungerade. Da p gerade ist, gibt es ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2r$. Nun ergibt sich $2 = \frac{4r^2}{q^2}$, also $q^2 = 2r^2$, d.h. q^2 und damit auch q ist auch ungerade! Wir haben also gezeigt:

$$\underbrace{(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})}_{\neg B} \Rightarrow \underbrace{(\exists q \in \mathbb{Z}, q \neq 0,\ \text{mit } q \text{ ist gerade und ungerade })}_{A} \quad \text{ist wahr.}$$

Da A falsch ist, kann $\neg B \Rightarrow A$ nur dann wahr sein, wenn $\neg B$ falsch ist, also B wahr, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. $\square$

Wichtig in indirekten Beweisen ist die korrekte Verneinung der Aussage. Dabei gelten:

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

- $\neg(\forall i \in I \text{ gilt } A_i) \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ mit } \neg A_i$
- $\neg(\exists i \in I \text{ mit } A_i) \Leftrightarrow \forall i \in I \text{ gilt } \neg A_i$

Beispiel 1.4 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn gilt:

Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so daß für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Die Verneinung ist nicht: "Es gibt kein $a \in \mathbb{R} \ldots$", sondern:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ existiert mit $|a_n - a| \geq \epsilon$.

2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Die Struktur der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird als bekannt vorausgesetzt. In dieser Vorlesung ist $0 \in \mathbb{N}$, für die natürlichen Zahlen ohne 0 schreiben wir $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die wichtigste Eigenschaft von $\mathbb{N}$ ist, daß für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau ein Nachfolger $n+1$ existiert, und startend mit 0 wird mit $0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$ jede natürliche Zahl genau einmal durchlaufen. Daraus ergibt sich das

2.1 Beweisprinzip der vollständigen Induktion. *Es sei $N \in \mathbb{N}$, und zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ sei eine Aussage A_n gegeben. Alle Aussagen A_n sind richtig, wenn man* (I0) *und* (I1) *beweisen kann:*

(I0) *A_N ist wahr (Induktionsanfang).*

(I0) *Für beliebiges $n \geq N$ gilt: Falls A_n wahr ist, so ist auch A_{n+1} wahr (Induktionsschritt).*

Beispiel 2.2 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage A_n:* $0 + 1 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Beweis. i) Wähle $N = 0$. Offenbar ist A_0 wahr.
ii) Unter der Annahme, daß A_n gilt, folgt

$$\underbrace{0 + 1 + \cdots + n}_{A_n} + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) ,$$

also die Aussage A_{n+1}. □

Da Summen wie in Beispiel 2.2 häufig vorkommen, vereinbart man das *Summenzeichen* Σ: Ist für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq k \leq n$ eine reelle Zahl a_k gegeben, dann setzt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n & \text{falls } n \geq m \\ 0 & \text{falls } n < m \end{cases}$$

(Dabei bedeutet ":=", daß der links stehende Ausdruck durch die rechte Seite erklärt wird.) Insbesondere ist $\sum\limits_{k=m}^{m} a_k = a_m$ und

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1} \ . \tag{*}$$

Durch letzte Eigenschaft kann man das Summenzeichen *rekursiv* ähnlich zum Prinzip der vollständigen Induktion definieren: Man wählt als Induktionsanfang $\sum\limits_{k=m}^{m-1} a_k := 0$ und (*) als Induktionsschritt. Weitere Beispiele rekursiver Definitionen sind die Potenzen einer reellen Zahl als $x^1 := x$ (Induktionsanfang) und $x^{n+1} := x \cdot x^n$ (Induktionsschritt). Für $x \neq 0$ definiert man außerdem $x^0 := 1$. (Der Ausdruck "0^0" ist nicht definiert. Jedoch werden wir im weiteren Verlauf des Semesters x^y definieren und x^y für $x, y \to 0$ untersuchen.) Mit diesen Vorbereitungen beweisen wir

Satz 2.3 (geometrische Summenformel) *Es sei x eine von 0 und 1 verschiedene reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt* $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Beweis. i) Induktionsanfang: Für $n = 0$ steht auf der linken Seite $x^0 = 1$ und auf der rechten Seite $\frac{1-x}{1-x} = 1$, die Aussage ist also wahr *unter der Voraussetzung $x \neq 0$ und $x \neq 1$.*
ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}\frac{1-x}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n-1}-x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \ .\end{aligned}$$

□

(Die linke Seite ist auch für $x = 1$ sinnvoll und ergibt $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$. Fragen wie nach dem Wert der rechten Seite für $x \to 1$ sind typisch für die Analysis.)

Ähnlich zum Summenzeichen wird auch das Produktzeichen (mit sonst gleichen Bezeichnungen wie zuvor) eingeführt als

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \end{cases}$$

Die rekursive Definition ist $\prod\limits_{k=m}^{m-1} a_k := 1$ und $\prod\limits_{k=m}^{n+1} a_k := a_{n+1} \cdot \prod\limits_{k=m}^{n} a_k$. Besonders wichtig ist für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ der Ausdruck $n! := \prod\limits_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n$, gesprochen

"n-Fakultät". Außerdem definiert man $0! := 1$. Über die Fakultät bildet man für $n, k \in \mathbb{N}$ die *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } n \geq k \\ 0 & \text{falls } n < k \end{cases}$$

Insbesondere gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $n \geq k \geq 1$, so ergibt sich $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, was für konkrete Berechnungen sinnvoller ist.

Lemma 2.4 *Für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Beweis. Für $k = 0$ ist auf der linken Seite $\binom{n+1}{1} = n + 1$ und auf der rechten Seite $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n$, d.h. die Formel gilt für $k = 1$. Für $n = k$ sind beide Seiten der Gleichung gleich 1 und für $k > n$ verschwinden beide Seiten der Gleichung. Damit verbleibt der Fall $n > k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$ □

Das Lemma ist der Hintergrund für das Pascalsche Dreieck zur Veranschaulichung der Binomialkoeffizienten.

Satz 2.5 (Binomialentwicklung) *Für reelle Zahlen $x, y \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Beweis. Durch Induktion nach n. i) Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $(x+y)^0 = 1$ und $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{-k} = 1$.

ii) Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}}_{k+1\to l} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n+1-k}}_{k\to l} \\
&= \sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^l y^{n+1-l} + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^l y^{n+1-l} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\underbrace{\left\{\binom{n}{l-1}+\binom{n}{l}\right\}}_{=\binom{n+1}{l}}x^l y^{n+1-l} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}}x^{n+1}y^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}}x^0y^{n+1} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}x^l y^{n+1-l} \qquad \square
\end{aligned}
$$

3 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen bilden aufgrund ihrer Vollständigkeit die Grundlage der Analysis. Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ bewirkt, daß die Subtraktion stets ausführbar ist. Dadurch bildet $\mathbb{Z}$ eine sogenannte *kommutative Gruppe*.

Definition 3.1 Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$ heißt *Gruppe*, falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

(G1) $(a*b)*c = a*(b*c)$ für alle $a, b, \in G$ (Assoziativgesetz)

(G2) Es gibt ein neutrales Element $e \in G$ mit $e*a = a$ für alle $a \in G$

(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ (das zu a inverse Element) mit $a^{-1}*a = e$

Die Gruppe heißt *kommutativ* (oder *abelsch*), falls außerdem $a*b = b*a$ für alle $a, b \in G$. In diesem Fall schreibt man meist $+$ für die Verknüpfung, 0 für das neutrale Element und $-a$ für das zu a inverse Element.

Die Erweiterung von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ bewirkt, daß die Division durch von Null verschiedene Elemente ausführbar wird. Außerdem sind die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ kompatibel. Man sagt, $\mathbb{Q}$ ist ein Körper:

Definition 3.2 Eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$
\begin{aligned}
+ :& K \times K \to K\,, & + &: (a,b) \mapsto a+b & &\text{(Addition)} \\
\cdot :& K \times K \to K\,, & \cdot &: (a,b) \mapsto a\cdot b & &\text{(Multiplikation)}
\end{aligned}
$$

heißt *Körper*, wenn folgendes gilt:

(K1) K zusammen mit der Addition ist eine kommutative Gruppe. Ihr neutrales Element wird mit 0 bezeichnet und das zu $a \in K$ inverse Element mit $-a$.

(K2) Sei $K^* := K \setminus \{0\}$, dann ist für $a, b \in K^*$ auch $a \cdot b \in K^*$, und K^* mit dieser Multiplikation ist eine kommutative Gruppe. Ihr neutrales Element wird mit 1 bezeichnet und das zu $a \in K^*$ inverse Element mit $a^{-1} = 1/a$. Man schreibt auch $a/b = a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1}$.

(K3) Es gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{und} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

für alle $a, b, c \in K$.

Offenbar sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Körper, $\mathbb{Z}$ ist es nicht. Später werden wir den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen einführen. In der Algebra werden noch viele weitere Körper untersucht, z.B. kann man die zweielementige Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ zu einem Körper machen. In $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ schreiben wir die Multiplikation meist als ab statt $a \cdot b$.

Die rationalen und reellen Zahlen sind dadurch gekennzeichnet, daß gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet sind:

Definition 3.3 (Anordnungs-Axiome) Ein Körper K heißt *angeordnet*, falls eine Teilmenge $K_+^* \subset K$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

(A1) Für $a \in K^* := K \setminus \{0\}$ ist entweder $a \in K_+^*$ oder $-a \in K_+^*$.

(A2) Aus $a, b \in K_+^*$ folgen $a + b \in K_+^*$ und $ab \in K_+^*$.

Die Elemente $a \in K^+$ heißen *positiv*, Schreibweise $a > 0$.

Offenbar sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ angeordnete archimedische Körper. Man vereinbart

$$\begin{array}{rl} a > b, & \text{falls } a - b > 0 \\ b < a, & \text{falls } a > b \\ a \leq b, & \text{falls } a < b \text{ oder } a = b \\ a \geq b, & \text{falls } a > b \text{ oder } a = b \end{array}$$

Ist $-a$ positiv, also $a < 0$, so heißt a negativ. Ist $a \geq 0$, so heißt a nichtnegativ. Die Menge der nichtnegativen rellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnet, die der positiven rellen Zahlen mit $\mathbb{R}_+^*$. Außerdem ist $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Anordnung ermöglicht die Darstellung der rellen Zahlen auf der Zahlengeraden

Alle Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen folgen aus diesen Axiomen. Hier eine Auswahl ohne Beweis.

Lemma 3.4 *Es sei K ein angeordneter Körper (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$). Dann gelten:*

i) *Für beliebige $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Relationen $a > b$, $a = b$, $a < b$.*

ii) *Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität).*

iii) *Aus $a > b$ folgen $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $a + c > b + c$ für alle $c \in \mathbb{K}$ sowie $ac > bc$ für $c \in \mathbb{K}_+^*$ und $ac < bc$ für $-c \in \mathbb{K}_+^*$.*

iv) *Aus $a > b$ und $c > d$ folgt $a+c > b+d$ und im Fall $b, d > 0$ auch $ac > bd$*

v) *Für $a \neq 0$ gilt $a^2 > 0$*

Analoge Regeln gelten für "$\geq$". Indem man $n \in \mathbb{N}$ mit $n1 := \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} \in K$ identifiziert, kann man $\mathbb{N}$ als Teilmenge jedes geordneten Körpers K auffassen, analog auch $\mathbb{Z}$. Indem man $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^*$ für $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $(p1)(q1)^{-1} \in K$ identifiziert, kann man $\mathbb{Q}_+^*$ und analog auch $\mathbb{Q}$ als Teilmenge jedes geordneten Körpers K auffassen.

Lemma 3.5 (Bernoullische Ungleichung) *Es sei K ein angeordneter Körper (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}$).*

i) *Für alle $x \in K$ mit $x > -1$ und $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $(1 + x)^n > 1 + nx$.*

ii) *Für alle $x \in K$ mit $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Beweis. Wir beweisen i) durch Induktion nach n. (1) Induktionsanfang: Für $n = 2$ ergibt ist $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ wegen $x^2 > 0$.
(2) Induktionsschritt. Die Bernoullische Ungleichung gelte für n. Dann folgt unter Verwendung von $1 + x > 0$ und $x^2 > 0$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1 + x)^n}_{>1+nx}(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x \ .$$

Der Beweis von ii) ist analog. $\square$

Definition 3.6 Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch*, wenn zusätzlich gilt:

(A3) Zu jedem Element $a \in \mathbb{K}$ gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $n - a > 0$.

Offenbar sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet.

Satz 3.7 *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $q, R, \epsilon \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

i) *Ist $q > 1$, so gibt es zu jedem $R \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $q^n > R \forall n \geq N$.*

ii) *Ist $0 < q < 1$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$.*

iii) *Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.*

Beweis. i) Setze $q = 1 + x$ mit $x > 0$. Nach (A3) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{R}{x} < N$, also $Nx > R$. Nach Bernoulli gilt $q^N > 1 + Nx$ für $N \geq 2$, $N \in \mathbb{N}$. Für $Nx > R$ ergibt sich $q^N > 1 + R > R$ und damit $q^n > R$ für alle $n \geq N \geq 2$.

ii) Für $0 < q < 1$ ist $\frac{1}{q} > 1$. Nach i) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{1}{q})^n > R := \frac{1}{\epsilon}$ für alle $n \geq N$. Damit ergibt sich $0 < q^n < \frac{1}{R} = \epsilon$ für alle $n \geq N$.

iii) Nach (A3) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{\epsilon} =: R < N$. Dann ist $N \geq 1$, und es folgt $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{R} = \epsilon$ für alle $n \geq N$. $\square$

Der Vergleich positiver Zahlen $\epsilon > 0$ wird im weiteren eine große Rolle spielen. Dazu benötigen wir

Definition 3.8 (Absolutbetrag) Für $a \in \mathbb{R}$ ist der *Absolutbetrag* $|a| \in \mathbb{R}_+$ erklärt als

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Lemma 3.9 *Für den Absolutbetrag gilt* $|a| = |-a|$, $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$, $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung),* $|ab| = |a||b|$, *und* $||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die ersten drei Beziehungen folgen aus der Definition, die Dreiecksungleichung dann aus Lemma 3.4.iv, $|ab| = |a||b|$ dann durch Fallunterscheidung nach $a \gtreqless 0$ und $b \gtreqless 0$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ bzw. $|a| - |b| \leq |a - b|$. Vertauschen von a, b liefert $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$, zusammengefaßt damit die letzte Ungleichung. $\square$

Die Dreiecksungleichung (und ihre Verallgemeinerungen) werden wir oft benötigen.

Alle bisher eingeführten algebraischen Strukturen gelten gleichermaßen für beide archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Der wesentliche analytische Unterschied ist die *Vollständigkeit* von $\mathbb{R}$. Wir definieren die Vollständigkeit zunächst geometrisch über Intervallschachtelungen, später über sogenannte Fundamentalfolgen (was sich auf andere Beispiele verallgemeinern läßt).

Definition 3.10 i) Beschränkte Intervalle. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen

$$\begin{array}{rll} [a,b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} & & \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\ ]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} & & \text{(offenes Intervall)} \\ [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} & & \text{(rechts halboffenes Intervall)} \\ ]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\} & & \text{(links halboffenes Intervall)} \end{array}$$

Die Intervalle $[a, b]$ nennt man auch *kompakt*. Für alle diese Intervalle $I = [a, b],]a, b[, \ldots$ heißen die Punkte a, b die *Randpunkte* und die $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ die *inneren Punkte*. Für jedes dieser Intervalle I ist $\bar{I} := [a, b]$ der Abschluß. Die relle Zahl $|I| := b - a$ heißt Länge des Intervalls I.

ii) Unbeschränkte Intervalle. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} [a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \le x\} &]a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\} \\ ]-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \le a\} &]-\infty,a[&:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\} \end{aligned}$$

und $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$.

Die in i) und ii) angegebenen Intervalle heißen auch *echte Intervalle* im Unterschied zum unechten Intervall $[a,a] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \le x \le a\} = \{a\}$.

Manchmal werden offene Intervalle auch als (a,b) geschrieben.

Definition 3.11 Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge $I_0, I_1, I_2, \ldots,$ kompakter Intervalle, kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit folgenden Eigenschaften:

(I1) $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(I2) zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit der Länge $|I_n| < \epsilon$.

Eine Formulierung der Vollständigkeit der reellen Zahlen besteht in der Gültigkeit des

3.12 Intervallschachtelungsprinzip. *Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Die so erhaltene reelle Zahl x ist eindeutig bestimmt: Gäbe es zwei solche Zahlen x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$, so müßte das Intervall $[x_1, x_2]$ in allen I_n enthalten sein, und jedes dieser I_n hätte eine Länge $\ge x_2 - x_1$ im Widerspruch zu (I2).

Eine erste Anwendung der Vollständigkeit ist die Existenz der k-ten Wurzeln positiver reeller Zahlen.

Satz 3.13 *Zu jeder reellen Zahl $x > 0$ und jeder natürlichen Zahl $k \ge 1$ gibt es genau eine reelle Zahl $y > 0$ mit $y^k = x$. (Diese wird als $y = x^{\frac{1}{k}}$ oder $y = \sqrt[k]{x}$ geschrieben.)*

Beweis. Da aus $y_1 > y_2 > 0$ die Relation $y_1^k > y_2^k > 0$ folgt, kann es höchstens eine positive Lösung geben. Für $x = 1$ ist $y = 1$ die einzige Lösung. Wir betrachten zunächst den Fall $x > 1$ und konstruieren eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1_n) $\quad a_n^k \le x \le b_n^k$

(2_n) $\quad |I_n| = \frac{1}{2^n}|I_0|$

Wir beginnen mit $I_0 := [1,x]$ als Induktionsanfang. Dann ist (2_0) offenichtlich, und aus $1 < x$ folgt $1^k \le x \le x^k$. Induktionsschritt von n auf $n+1$: Gegeben ist $I_n = [a_n, b_n]$ mit (1_n) und (2_n). Setze $c_n := \frac{1}{2}(a_n + b_n) = a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= c_n \ , \ b_{n+1} := b_n \quad \text{falls } c_n^k \le x \ , \\ a_{n+1} &:= a_n \ , \ b_{n+1} := c_n \quad \text{falls } c_n^k > x \ . \end{aligned}$$

Diese Konstruktion erfüllt (1_{n+1}) und wegen $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_|$ auch (2_{n+1}). Nach Satz 3.7 erfüllt $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaften einer Intervallschachtelung (Definition 3.11), und nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bleibt zu beweisen, daß $y^k = x$. Dazu zeigt man, daß auch $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $J_n := [a_n^k, b_n^k]$ eine Intervallschachtelung ist. Der Einschluß $J_{n+1} \subset J_n$ ist klar, und für die Längen gilt für $k > 1$

$$|J_n| = b_n^k - a_n^k = \underbrace{(b_n - a_n)}_{=|I_n|}\underbrace{(b_n^{k-1}a_n^0 + b_n^{k-2}a_n^1 + \cdots + b_n^0 a_n^{k-1})}_{<kx^k} < \frac{kx}{2^n}|I_0| \ .$$

Nun liegen nach Konstruktion sowohl x als auch y^k in jedem Intervall J_n. Da diese in allen Intervallen der Schachtelung liegende reelle Zahl eindeutig ist, gilt $y^k = x$.

Ist $0 < x < 1$, so konstruiert man zu $\frac{1}{x} > 1$ die k-te Wurzel $y > 1$ mit $y^k = \frac{1}{x}$. Dann ist $\frac{1}{y}$ die k-te Wurzel aus x, denn $(\frac{1}{y})^k = \frac{1}{y^k} = \frac{1}{1/x} = x$. $\square$

Definition 3.14 (obere und untere Schranken) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt* bzw. *nach unten beschränkt*, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt

$$x \leq s \qquad \text{bzw.} \qquad x \geq s \ .$$

In diesem Fall heißt s eine *obere Schranke* bzw. eine *untere Schranke*. Die Menge M heißt *beschränkt*, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiel 3.15 Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind die offenen, halboffenen und abgeschlossenen Intervalle $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ und $[a, b]$ beschränkt, damit auch nach oben oder unten beschränkt. Aus dem archimedischen Axiom folgt: Die Intervalle $[a, \infty]$ und $]a, \infty]$ sind nach unten beschränkt, aber nicht beschränkt. Die Intervalle $]-\infty, b[$ und $]-\infty, b]$ sind nach oben beschränkt, aber nicht beschränkt. Das Intervall $]-\infty, \infty[$ ist weder nach oben noch nach unten geschränkt.

In einer beschränkten Menge braucht es eine größte oder kleinste Zahl nicht zu geben. Ist $I =]0, 1[$, dann gibt es zu jeder Zahl $x \in I$ eine größere, z.B. $\frac{1+x}{2} > x$. Damit ist $s = 1$ eine obere Schranke von I (und jede reelle Zahl $s > 1$ ist ebenfalls eine obere Schranke), aber $1 \notin I$. Aber 1 ist die kleinste obere Schranke von I:

Definition 3.16 (Supremum und Infimum) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* der Menge $M \subset \mathbb{R}$, geschrieben $s = \sup M$, wenn s die kleinste obere Schranke für M ist, d.h.

i) M ist beschränkt und s ist eine obere Schranke für M.

ii) Jede Zahl $s' < s$ ist keine obere Schranke für M.

Entschrechend ist das *Infimum* von $M \subset \mathbb{R}$ die größte untere Schranke, geschrieben $\inf M$.

Beispiel 3.17 Für die Intervalle I gegeben durch $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ und $[a,b]$ mit $a < b$ gilt jeweils $\sup I = b$ und $\inf I = a$. Auf der nach oben abgeschlossenen Seite von $[a,b]$ und $]a,b]$ wird das Supremum b in I angenommen, es liegt dann ein Maximum vor, wobei $\max M := \{x \in M \;:\; y \leq x \quad \forall y \in M\}$. Es gilt dann $\sup(]a,b]) = \max(]a,b]) = b$. Dagegen gilt $\sup([a,b[) = b$, aber $[a,b[$ besitzt kein Maximum.

Satz 3.18 *Jede nach oben (unten) beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).*

Bemerkung: Das ist eine Formulierung der Vollständigkeit und gilt somit nicht für $M \subset \mathbb{Q}$.
Beweis (für das Supremum). Analog zum Existenzbeweis der k-ten Wurzel (Satz 3.13) konstruiert man eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ derart, daß $b_n \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke ist und $a_n \in M$ keine obere Schranke ist. Man startet mit einem beliebigen $a_0 \in M$ und einer beliebigen oberen Schranke b_0 und konstruiert per Induktion das Intervall I_{n+1} durch Halbierung von I_n. Eine der Hälften hat die geforderten Eigenschaften. □

Umgekehrt folgt das Intervallschachtelungsprinzip aus der Existenz eines Supremums und Infimums für beschränkte Mengen: Es sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung. Die Menge $A := \{a_0, a_1, \dots\}$ ist nach oben beschränkt durch jedes der oberen Schranken b_i. Dann gibt es das Supremum $s = \sup A \in \mathbb{R}$ (kleinste obere Schranke) mit $a_n \leq s \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4 Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar, in der die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ lösbar ist. Viele Bereiche der Analysis lassen sich ohne Modifikation von den reellen auf die komplexen Zahlen erweitern, und manche Eigenschaften im Reellen lassen sich über den "Umweg" der komplexen Zahlen besser verstehen.

Für den zu bestimmenden Erweiterungskörper $\mathbb{C}$ der reellen Zahlen fordern wir:

i) $z^2 + 1 = 0$ ist lösbar, und i bezeichne eine Lösung dieser Gleichung.

ii) Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt auch $x \in \mathbb{C}$.

Dann ist für $x, y \in \mathbb{R}$ auch $z := x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Die Körperaxiome (insbesondere Kommutativität und Distributivität) sowie $\mathrm{i}^2 = -1$ liefern für $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$(x+\mathrm{i}y)+(u+\mathrm{i}v) = (x+u)+\mathrm{i}(y+v)\;, \qquad (x+\mathrm{i}y)\cdot(u+\mathrm{i}v) = (xu-yv)+\mathrm{i}(xv+yu)\;.$$

Damit ist die Menge der Elemente der Form $x + \mathrm{i}y$ abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Aus $(x + \mathrm{i}y) = (u + \mathrm{i}v)$ folgt $(x - u)^2 = -(y - v)^2$, also $x = u$

und $y = v$. Die beiden reellen Zahlen x, y in $z = x + \mathrm{i}y$ sind durch z eindeutig definiert. Das formalisiert man wie folgt:

Definition 4.1 Eine komplexe Zahl ist ein Element $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgender Addition und Multiplikation:

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v) , \qquad (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu) .$$

Satz 4.2 *Die mit dieser Addition und Multiplikation definierte Menge der komplexen Zahlen bildet einen Körper, der mit $\mathbb{C}$ bezeichnet wird.*

Beweis. Es sind die Körperaxiome nach Definition 3.2 zu überprüfen. Man findet:

- $0 = (0, 0)$ ist das neutrale Element der Addition.
- $1 = (1, 0)$ ist das neutrale Element der Multiplikation.
- $-z = (-x, -y)$ ist bezüglich der Addition das zu $z = (x, y)$ inverse Element.
- Nicht so offensichtlich ist das zu $z \neq 0$ bezüglich der Multiplikation inverse Element: Dieses ist gegeben durch $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$, d.h. es gilt $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}) \cdot (x, y) = (1, 0)$.

(Man kann allgemein zeigen, daß das neutrale und inverse Element einer Gruppe eindeutig ist.) Durch Nachrechnen zeigt man die Distributivgesetze. $\square$

Die durch $\iota : x \mapsto (x, 0)$ definierte Abbildung $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist injektiv. Wegen $(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0)$ und $(x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0)$ kann man deshalb $\mathbb{R}$ mit seinem Bild $\iota(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ identifizieren und somit die reellen Zahlen als Unterkörper der komplexen Zahlen auffassen.

Unter Verwendung der *imaginären Einheit* $\mathrm{i} := (0, 1) \in \mathbb{C}$, mit $\mathrm{i}^2 = (-1, 0) = -1$, kann man eine komplexe Zahl schreiben als $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = \iota(x) + \mathrm{i}\iota(y)$, oder kurz als $z = x + \mathrm{i}y$.

Definition 4.3 Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ heißt

- $\mathrm{Re}(z) := x \in \mathbb{R}$ der *Realteil* von z,
- $\mathrm{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$ der *Imaginärteil* von z
- $\bar{z} := x - \mathrm{i}y$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.

Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ heißt *komplexe Konjugation*.

Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} , & \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} , \\ z + \bar{z} &= 2\mathrm{Re}(z) , & z - \bar{z} &= 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) , \\ \bar{\bar{z}} &= z , & z \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad z = \bar{z} . \end{aligned}$$

Für $z = x + \mathrm{i}y$ ist $z \cdot \bar{z} = (x + \mathrm{i}y) \cdot (x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2$ stets eine nichtnegative reelle Zahl. Es läßt sich deshalb die Wurzel ziehen, und wir definieren

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$$

als den *Betrag* von z.

Satz 4.4 *Für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

i) $|z| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 0$,

ii) $|\bar{z}| = |z|$,

iii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $\qquad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$,

iv) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

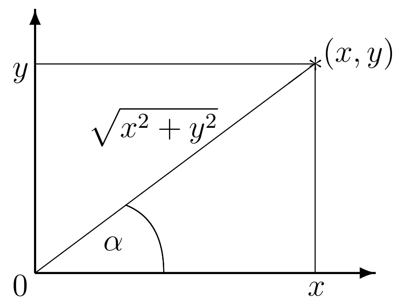
v) $|z + w| \leq |z| + |w|$ $\qquad$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis. i),ii),iii) sind klar. Zu (iv) betrachte $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$. Bleibt die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\overset{iii)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \ . \end{aligned}$$

□

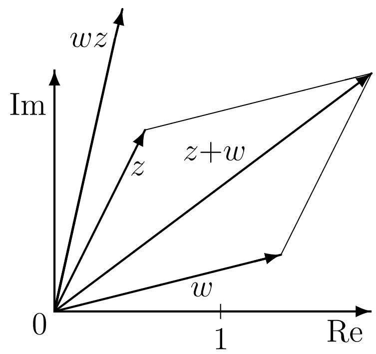
Es ist nun sehr intuitiv, eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ als Punkt (x, y) in einem kartesischen Koordinatensystem in der Ebene (Gaußsche Zahlenebene) darzustellen. Nach Pythagoras ist dann $|z|$ gerade der Abstand dieses Punktes vom Ursprung $0 = (0, 0)$.



Ist $z \neq 0$, dann ergeben sich Real- und Imaginärteil in Polarkoordinaten zu $x = |z| \cos\alpha$ und $y = |z| \sin\alpha$, so daß wir folgende Darstellung einer komplexen Zahl erhalten:

$$z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \ , \qquad 0 \leq \alpha < 2\pi \ .$$

Die Addition $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$ entspricht geometrisch der Addition von Vektoren:



Die Dreiecksungleichung $|z + w| \le |z| + |w|$ entspricht der Tatsache, daß in einem Dreieck die Summe zweier Seitenlängen größer ist als die Länge der verbleibenden Seite.

Die Multiplikation schreibt man am besten in Polarkoordinaten: Ist $z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ und $w = |w|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\big) \\ &= |z||w|\big(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)\big) \ , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Additionstheoreme verwendet wurden. Folglich ergibt sich in Polarkoordinaten das Produkt zw durch Multiplikation der Radien und Addition der Winkel von z und w. Alternativ kann man sich überlegen, daß für festes $w \in \mathbb{C}$ die durch $f : z \mapsto zw$ definierte Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wegen $|f(z_1 - z_2)| = |w|\,|z_1 - z_2|$ eine *Ähnlichkeitsabbildung* ist: Alle Längen werden um $|w|$ gestreckt/gestaucht, damit bleiben Dreiecke kongruent und allgemein bleiben die Winkel zwischen Vektoren erhalten. Da der Ursprung erhalten bleibt und 1 in w überführt wird, ist die Abbildung $z \mapsto wz$ für $w = |w|(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$ zusammengesetzt aus einer Drehung von z um den Ursprung mit Drehwinkel β und einer anschließenden Skalierung um den Faktor $|w|$.

Über diese geometrische Deutung der Multiplikation findet man die *n-ten Einheitswurzeln*, also komplexe Zahlen mit $z^n = 1$. Nach der Eindeutigkeit der reellen Wurzeln gilt $|z_k| = 1$ für jede Lösung z_k: die Einheitswurzeln liegen auf dem (Einheits-) Kreis mit Radius 1 um den Ursprung. Damit gilt $z_k = \cos\alpha_k + \mathrm{i}\sin\alpha_k$ und nach der Multiplikationsregel $z_k^n = \cos(n\alpha_k) + \mathrm{i}\sin(n\alpha_k)$. Aus $z_k^n = 1$ folgt nun $n\alpha_k = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und die Menge der verschiedenen Lösungswinkel ist somit $\alpha = \{\frac{2\pi k}{n} \ : \ k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Folglich hat $z^n = 1$ die n Lösungen $z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n}$ mit $k = 0, 1, \dots, n-1$. Insbesondere hat $z^2 = 1$ die Lösungen $z = \{1, -1\}$, und $z^4 = 1$ hat die Lösungen $z = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$. Die Tatsache, daß $z^n = 1$ genau n Lösungen hat, steht in Verbindung zum

4.5 Fundamentalsatz der Algebra. *Es sei $n > 0$. Jede Gleichung*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung.

Teil II
Folgen und Reihen

5 Folgen und Grenzwerte

Unter einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen versteht man eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, d.h. jedem $n \in \mathbb{N}$ wird eine komplexe Zahl $a_n \in \mathbb{C}$ zugeordnet. Analog ist eine Folge reeller Zahlen definiert.

Definition 5.1 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Die Zahl a heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, geschrieben $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Wichtig ist, daß das $N \in \mathbb{N}$ in der Definition von ϵ abhängt. Verkleinert man ϵ, dann muß im allgemeinen N vergrößert werden.

Im Fall der Konvergenz ist der Grenzwert einer Folge eindeutig: Angenommen, a, b wären Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gibt es zu jedem $\epsilon = \frac{1}{3}|a - b| > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ und $|a_n - b| < \epsilon$. Nach der Dreicksungleichung gilt aber $|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\epsilon$, im Widerspruch zu $2\epsilon = \frac{2}{3}|a - b|$. Geometrisch bedeutet Definition 5.1, daß alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N$ in der Kreisscheibe

$$K_\epsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z - a| < \epsilon\}$$

in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt a und Radius ϵ liegen, bzw. für reelle Folgen im offenen Intervall $I_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x - a| < \epsilon\}$ mit Mittelpunkt a und halber Länge (Radius) ϵ. Die Teilmengen $K_\epsilon(a) \subset \mathbb{C}$ bzw. $I_\epsilon(a) \subset \mathbb{R}$ heißen auch die *ϵ-Umgebungen* von a.

Beispiel 5.2

i) Die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen a.

ii) Die Folge $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz 3.7.ii) gegen 0, ist also eine Nullfolge.

iii) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert: Angenommen, $a \in \mathbb{C}$ wäre Grenzwert dieser Folge, dann gäbe es für $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|(-1)^n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Damit wäre nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^{n+1} - a + a - (-1)^n| \\ &\leq |(-1)^{n+1} - a| + |a - (-1)^n| < 2 \;, \qquad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a und gibt es für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $a_n = b_{n+m}$ für alle $n \geq N$, so ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Damit können in einer konvergenten Folge die Folgenglieder a_n mit $n \leq N$ beliebig abgeändert werden, insbesondere auch weggelassen oder endlich viele Glieder vor a_n eingeschoben werden, ohne Konvergenz und Grenzwert zu ändern.

Satz 5.3 *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = ab$

iii) *Ist $b \neq 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+N}}{b_{n+N}} = \dfrac{a}{b}$*

Beweis. i) Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ (man wähle die größere der Schranken N beider Folgen). Die Dreiecksungleichung liefert

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N\ .$$

ii) Wähle N derart, daß $|a_n - a| < \min(1, \frac{\epsilon}{2(|b|+1)})$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)}$ für alle $n \geq N$. Dann ist $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1$ und

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| \\ &= |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b| < (|a| + 1)\frac{\epsilon}{2(|a| + 1)} + \frac{\epsilon}{2(|b| + 1)}|b| < \epsilon\ . \end{aligned}$$

iii) Sei $c := \frac{1}{2}|b| > 0$. Wähle N derart, daß $|b_n - b| < \min(c, \frac{\epsilon}{2}|b|^2)$ für alle $n \geq N$. Für diese n gilt dann $|b| = |(b - b_n) + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n|$, also $|b_n| \geq |b| - |b - b_n| > \frac{1}{2}|b| > 0$. Weiter folgt für $n \geq N$

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \Big|\frac{b - b_n}{b_n b}\Big| = \frac{|b_n - b|}{|b|\,|b_n|} < \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} < \epsilon\ .$$

Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_{N+n}} = \dfrac{1}{b}$, und mit ii) folgt die Behauptung. □

Satz 5.4 (elementare Grenzwerte) *Im folgenden sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^s} = 0$ *für alle $s \in \mathbb{Q}^*_+$. (Dabei ist $n^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{n^p} \in \mathbb{R}$.)*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *für alle $a \in \mathbb{R}^*_+$.*

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

iv) $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$.

v) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{z^n} = 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| > 1$ *und alle* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. i) Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle nach dem Archimedischen Axiom $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $N > \epsilon^{-\frac{1}{s}}$. Dann gilt für $n \geq N$ zunächst $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, dann $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p}$ und $\sqrt[q]{\frac{1}{n^p}} \leq \sqrt[q]{\frac{1}{N^p}}$, also $|\frac{1}{n^s}| \leq |\frac{1}{N^s}| < \epsilon$.

ii) Für $a \geq 1$ setze $x_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist $a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$, damit $x_n < \frac{a}{n}$ und $0 < |\sqrt[n]{a} - 1| = x_n < \epsilon$ für alle $n \geq N > \frac{a}{\epsilon}$. Für $0 < a < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = 1$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 5.3.iii).

iii) Sei $n \geq 2$. Nach der Binomialentwicklung gilt für $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 ,$$

also $n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$ und schließlich $x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$ für $n \geq 2$. Wähle $N > \frac{2}{\epsilon^2}$, so folgt $|\sqrt[n]{n} - 1| = x_n < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

iv) Es gilt $|z^n - 0| = |z|^n$. Die Aussage folgt aus Satz 3.7.ii).

v) Betrachte $n > 2k + 1$ und $|z| = 1 + x$ mit $x > 0$. Dann ergibt die Binomialentwicklung

$$(1 + x)^n > \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} > \left(\frac{n}{2}\right)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} ,$$

also $\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n}$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \max\left(\frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{\epsilon},\ 2k+1\right)$, dann folgt $\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. $\square$

Beispiel 5.5 Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{3n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \dfrac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty} 3 + \dfrac{4}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

ii) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k = (\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}))^k = 1$

Einige weitere Rechenregeln für Grenzwerte:

Satz 5.6 i) *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiere gegen* $a \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| , \quad \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \bar{a} , \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a) , \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a) .$$

Insbesondere sind die Grenzwerte reeller Folgen reell, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) + \mathrm{i} \cdot \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) .$$

ii) *Es gelte* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *ferner gebe es ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \geq N$. *Dann gilt* $a \leq b$.

iii) *Zu einer Folge* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gebe es konvergente Folgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, daß* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für alle* $n \geq N$. *Gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, *dann konvergiert auch* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

iv) *Für eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen gebe es ein* $N \in \mathbb{N}$ *und ein* $0 < q < 1$, *so daß für alle* $n \geq N$ *gilt* $a_n \neq 0$ *und* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$. *Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis. i) Nach Satz 4.4 gilt $|\mathrm{Re}(a_n) - \mathrm{Re}(a)| = |\mathrm{Re}(a_n - a)| \leq |a_n - a|$, damit folgt aus der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz von $(\mathrm{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Analog für $\mathrm{Im}(a_n)$ und $\overline{a_n}$. Für die Beträge folgt die Aussage aus Lemma 3.9: $||a_n|-|a|| \leq |a_n - a|$. Der zweite Teil ist klar.

ii) Nach Voraussetzung gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß gleichzeitig $a_n \leq b_n$ sowie $|a_n - a| < \epsilon$ und $|b_n - b| < \epsilon$ gilt für alle $n \geq N$. Nach Fallunterscheidung bedeutet das $-\epsilon < a_n - a < \epsilon$ und $-\epsilon < b_n - b < \epsilon$, somit schließlich $a - \epsilon < a_n \leq b_n < b + \epsilon$. Das ergibt $a - b < 2\epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, also $a - b \leq 0$.

iii) Wie in ii) gilt $a-\epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a+\epsilon$ für alle $n \geq N$, also $|c_n - a| < \epsilon$.

iv) Aus $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ folgt $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$, damit für $n = N + k$ die Relation

$$|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \cdots \leq q^k|a_N| = q^n \frac{|a_N|}{q^N} \;.$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es nach Satz 3.7.ii) ein $N' \in \mathbb{N}$ mit $q^n < \epsilon \frac{q^N}{|a_N|}$ für alle $n \geq N'$. Damit gilt $|a_n - 0| < \epsilon$ für alle $n \geq \max(N', N)$. □

Beispiel 5.7 i) Für $s \in \mathbb{Q}_+^*$ gilt $1 \leq \sqrt[n]{n^s} \leq \sqrt[n]{n^k}$ für ein $k \geq s$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^s} = 1$.

ii) Für $0 \leq a < b$ gilt $b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2(b^n)} = b\sqrt[n]{2}$, damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

Entsprechend der allgemeinen Definition beschränkter Teilmengen heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 5.8 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei a der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gibt es zu $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Dann ist $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1$ für alle $n \geq N$, und insgesamt gilt $|a_n| \leq s := \max\big(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, |a| + 1\big)$. □

Die Umkehrung wäre falsch: Aus der Beschränktheit einer Folge folgt nicht die Konvergenz, wie das Beispiel $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt.

Definition 5.9 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reeller* Zahlen heißt

i) *monoton wachsend* bzw. *streng monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \le a_{n+1}$ bzw. $a_n < a_{n+1}$;

ii) *monoton fallend* bzw. *streng monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \ge a_{n+1}$ bzw. $a_n > a_{n+1}$;

iii) *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Bemerkung: Monotonie kann nicht für Folgen komplexer Zahlen definiert werden.

Satz 5.10 *Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert*

i) *gegen* $\sup A$*, falls die Folge monoton wachsend ist,*

ii) *gegen* $\inf A$*, falls die Folge monoton fallend ist,*

wobei $A := \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

Beweis. i) Sei $s := \sup A$, d.h. die kleinste obere Schranke. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $a_N \in A$ mit $s - \epsilon < a_N$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $s - \epsilon < a_n \le s$, d.h. $|a_n - s| < \epsilon$, für alle $n \ge N$. ii) ist analog. □

Satz 5.11 (Eulersche Zahl e) *Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$. Dann gilt: Die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ ist konvergent, und für ihren Grenzwert $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ gilt $2 < e \le 3$.*

Genauer gilt: e ist irrational mit $e = 2,71828\ldots$. Wir werden später sehen, daß e in der Analysis eine wichtige Rolle spielt.

Beweis. Wir zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Monotonie folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\Big)^n = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)^n = \frac{n}{n-1}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^n \\ &\overset{\text{Bernoulli}}{>} \frac{n}{n-1}\Big(1 - n\frac{1}{n^2}\Big) = 1\ ,\end{aligned}$$

d.h. $a_n > a_{n-1}$ für alle $n \ge 2$. Weiter gilt nach der binomischen Formel für $n \ge 2$

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \\ &\le 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3\ .\end{aligned}$$

Dabei wurde für $k \ge 1$ die Ungleichung $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots k} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ sowie im letzten Schritt die geometrische Summenformel benutzt. Also ist a_n beschränkt mit $a_n < 3$, und nach Satz 5.10 konvergiert die Folge. Eine untere Schranke ergibt sich z.B. für $n = 2$ zu $(1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2$. $\square$

Oft sind Folgen rekursiv definiert durch einen Startwert a_0 (oder mehrere Startwerte $a_0, a_1, \ldots, a_N$) und eine Rekursionsformel.

Satz 5.12 (Folge zur Berechnung der Quadratwurzeln) *Es sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Für einen beliebigen Startwert $x_0 > 0$ konvergiert die rekursiv definierte Folge*

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegen $\sqrt{a} \in \mathbb{R}_+^*$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Beweis. Nach Induktion ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_n - \frac{a}{x_n}\Big)^2 \geq 0\ ,$$

d.h. $x_n \geq \sqrt{a}$ für alle $n \geq 1$. Damit ergibt sich, daß die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) > 0 \qquad n \geq 1\ .$$

Nach Satz 5.10 konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $x \geq \sqrt{a}$. Für diesen Grenzwert gilt die Gleichung $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, mit der positiven Lösung $x = \sqrt{a}$. $\square$

Das Rekursionsverfahren hat mehrere interessante Eigenschaften: 1) Es ist stabil, also unabhängig vom Startwert. 2) Man kann zeigen, daß die Folge sehr schnell (quadratisch) gegen den Grenzwert konvergiert, so daß schon wenige Folgenglieder eine brauchbare Näherung liefern.

Allgemeiner gilt (Beweis ist analog):

Satz 5.13 (Folge zur Berechnung der k-ten Wurzeln) *Es sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Für einen beliebigen Startwert $x_0 > 0$ konvergiert die rekursiv definierte Reihe*

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\Big((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\Big) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegen $\sqrt[k]{a} \in \mathbb{R}_+^*$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

6 Der Satz von Bolzano-Weierstraß. Cauchy-Folgen

Definition 6.1 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Direkt aus der Definition folgt, daß jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist gegen den gleichen Grenzwert, d.h. für konvergente Folgen gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Definition 6.2 Eine Zahl $h \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen h konvergiert.

Satz 6.3 *Eine Zahl $h \in \mathbb{C}$ ist genau dann Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{nh\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt: Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \;:\; |h - a_n| < \epsilon\}$ ist unendlich.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Es gebe eine gegen h konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - h| < \epsilon$ für alle $k \geq N$. Die Menge $\{n_k \in \mathbb{N} \;:\; k \geq N\}$ ist unendlich.

($\Leftarrow$) Jede ϵ-Umgebung von h enthalte unendlich viele Folgenglieder. Wir konstruieren induktiv eine Abbildung $k \to n_k$ mit $n_{k+1} > n_k$ und $|a_{n_k} - h| < \frac{1}{k+1}$, also eine gegen h konvergente Teilfolge.
i) Induktionsanfang: Wegen $\{n \in \mathbb{N} \;:\; |a_n - h| < 1\} \neq \varnothing$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_0} - h| < 1$.
ii) Induktionsschritt $k \to k+1$: Sei a_{n_k} gewählt mit $|a_{n_k} - h| < \frac{1}{k+1}$. Nach Voraussetzung ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} \;:\; |a_n - h| < \frac{1}{k+2}$ unendlich, insbesondere enthält sie eine Zahl $m > n_k$. Setze $n_{k+1} := m$. □

Beispiel 6.4

i) Die alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ besitzt die beiden Häufungspunkte 1 und -1, denn $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1 und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen -1.

ii) Die durch $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ gegebenen Folge hat ebenfalls 1 und -1 als Häufungspunkte, denn $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n+1}) = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(-1 + \dfrac{1}{n+1}) = -1$.

iii) Die durch $a_n = n$ definierte Folge hat keine Häufungspunkte: jede Teilfolge enthält unendlich viele Elemente, die paarweise einen Abstand ≥ 1 haben.

iv) Eine konvergente Folge hat ihren Grenzwert als einzigen Häufungspunkt, da jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

Satz 6.5 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Wir zeigen den Satz zunächst für Folgen reeller Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$. Wegen der Beschränktheit der Folge gibt es reelle Zahlen $c < d$ mit $a_n \in [c, d]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß

$I_k = [c_k, d_k]$ unendlich viele Folgenglieder a_n enthält, sowie eine zugehörige Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $n_{k+1} > n_k$ und $a_{n_k} \in I_k$.
i) Induktionsanfang: Wähle $I_0 = [c_0, d_0]$ mit $c_0 := c$ und $d_0 = d$ sowie ein $a_{n_0} \in I_0$.
ii) Induktionsschritt $k \to k+1$. Sei $I_k = [c_k, d_k]$ bereits konstruiert und $m_k := \frac{1}{2}(c_k + d_k)$ der Mittelpunkt. Da I_k unendlich viele Folgenglieder enthält, können nicht beide Teilintervalle $[c_k, m_k]$ und $[m_k, d_k]$ nur endlich viele Folgenglieder enthalten. Setze $I_{k+1} := [c_{k+1}, d_{k+1}]$ mit $c_{k+1} := c_k$ und $d_{k+1} := m_k$, falls $[c_k, m_k]$ unendlich viele Folgenglieder enthält, ansonsten $I_{k+1} := [c_{k+1}, d_{k+1}]$ mit $c_{k+1} := m_k$ und $d_{k+1} := d_k$. Offenbar gilt $I_{k+1} \subset I_k$ und $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|I_k| = \frac{1}{2^{k+1}}|I_0|$. Da die Menge $\{n \in \mathbb{N} \;:\; a_n \in I_{k+1}\}$ unendlich ist, enthält sie ein Element $m > n_k$. Setze $n_{k+1} := m$, d.h. es gilt $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ und $n_{k+1} > n_k$.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $h \in \mathbb{R}$ mit $h \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $I_k \subset [h-\epsilon, h+\epsilon]$ für alle $k \geq N$, d.h. $|a_{n_k} - h| \leq \epsilon < 2\epsilon$ für alle $k \geq N$. Das bedeutet $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = h$, und der Satz von Bolzano-Weierstraß ist im reellen Fall bewiesen.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen, dann bildet $(\mathrm{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folgen reeller Zahlen. Nach obigem Beweis gibt es eine konvergente Teilfolge $(\mathrm{Re}(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Re}(a_{n_k}) = h_1$. Die Folge der Imaginärteile $(\mathrm{Im}(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine beschränkte Folge reeller Zahlen und enthält somit eine konvergente Teilfolge $(\mathrm{Im}(a_{(n_k)_l}))_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{l\to\infty} \mathrm{Im}(a_{(n_k)_l}) = h_2$. Dann gilt auch $\lim_{l\to\infty} \mathrm{Re}(a_{(n_k)_l}) = h_1$ als Teilfolge einer konvergenten Folge. Insgesamt ist eine konvergente komplexe Teilfolge $(a_{(n_k)_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert mit $\lim\limits_{l\to\infty} a_{(n_k)_l} = h_1 + \mathrm{i}h_2$. □

Nach Definition 6.2 kann man den Satz von Bolzano-Weierstraß auch so formulieren, daß jede beschränkte Folge komplexer Zahlen mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Der Beweis nutzt ganz entscheidend das Intervallschachtelungsprinzip. Unter Verwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß beweisen wir nun das Cauchysche Konvergenzkriterium, das es auch ohne Kenntnis des Grenzwertes erlaubt, die Konvergenz von Folgen zu entscheiden.

Satz 6.6 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|a_n - a_m| < \epsilon$ gilt für alle $n, m \geq N$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent mit Grenzwert a. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|a_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$. Die Dreiecksungleichung liefert $|a_n - a_m| = |a_n - a + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \epsilon$.

($\Leftarrow$) Es gelte $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, denn zu $\epsilon = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_N| < 1$ für alle $n \geq N$; somit gilt $|a_n| \leq \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, |a_N| + 1)$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Wir zeigen, daß auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert: Zu beliebigem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$, so daß gleichzeitig gilt $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $m, n \geq N'$ und $|a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für ein $n_k \geq N'$. Die Dreiecksungleichung liefert $|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + (a_{n_k} - a)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \epsilon$. □

Definition 6.7 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt *Cauchy-Folge* (oder *Fundamentalfolge*), wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Nach Satz 6.6 sind in $\mathbb{C}$ genau die Cauchy-Folgen die konvergenten Folgen. Der Beweis benutzt Bolzano-Weierstraß, wobei der entscheidende Teil für *reelle Folgen* bewiesen wird, wo das Intervallschachtelungsprinzip zur Verfügung steht. Damit wird das Cauchysche Konvergenzkriterium letztendlich auf die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zurückgeführt. Bemerkenswert ist, daß auch die Umkehrung gilt:

Satz 6.8 *Für einen archimedisch angeordneten Körper folgt das Intervallschachtelungsprinzip aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium.*

Beweis. Es sei $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_N - b_N| < \epsilon$. Wegen $a_n < b_N$ für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $m, n \geq N$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Sei $s := \lim_{n\to\infty} a_n$ der Grenzwert. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $a_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $a_k < b_n$ und Satz 5.6 für die konstante Folge $(b_n)_k = b_n$ folgt $s \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $s \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Dadurch wird es sinnvoll, die Vollständigkeit eines Raumes über die Konvergenz von Cauchy-Folgen zu definieren. Dazu wird in der allgemeinsten Version ein sogenannter Abstand benötigt, für den wir im wesentlichen die Dreiecksungleichung fordern:

Definition 6.9 Eine Menge X mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, dem *Abstand*, heißt *metrischer Raum*, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt

- (D1) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
- (D2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
- (D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Die Axiome liefern insbesondere $d(x, y) \geq 0$. Beispiele sind die durch Beträge definierten Abstände in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, d.h. $d(x, y) = |x - y|$, aber auch der durch Pythagoras gegebene Abstand im $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$d\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \,.$$

Die Definition der Konvergenz einer Folge und die Definition einer Fundamentalfolge überträgt sich sofort auf beliebige metrische Räume, so daß deren Vollständigkeit charakterisiert werden kann:

Definition 6.10 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen $a_n \in X$.

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge* (oder *Fundamentalfolge*), wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d(a_n, a_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in X$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $d(a_n, a) < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen $a_n \in X$ in X konvergent ist.

Im Sinne dieser Definition haben wir mit Satz 6.6 und Satz 6.5 die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ bewiesen. Ebenso würde man die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^n$ zeigen.

Offenbar gibt es metrische Räume, die nicht vollständig sind. Ein Beispiel ist $\mathbb{Q}$ mit dem Abstand $d(q, r) = |q - r|$ für $q, r \in \mathbb{Q}$. Jedoch gilt ganz allgemein, daß man einen beliebigen metrischen Raum (X, d) vervollständigen kann zu einem metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$, indem man Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen hinzunimmt. Dazu erklärt man einen Pseudo-Abstand zweier Cauchy-Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X als

$$\hat{d}\big((a_n), (b_n)\big) := \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) .$$

Dieser Abstand ist wohldefiniert, es gilt die Dreiecksungleichung, aber aus $d\big((a_n), (b_n)\big) = 0$ folgt natürlich nicht die Gleichheit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Folgen. Jedoch bilden Cauchy-Folgen mit Abstand 0 eine Äquivalenzrelation, und $(\hat{X}, \hat{d})$ ist die Menge dieser Äquivalenzklassen mit obigem Abstand (der wirklich (D1)-(D3) erfüllt!). Repräsentanten für Elemente $a \in X$ sind z.B. die konstanten Folgen $a_n = a$. Auf diese Weise kann man $\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ mittels $d(q, r) = |q - r|$ definieren.

7 Reihen

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so werden durch

$$s_0 := a_0 , \quad s_1 := a_0 + a_1 , \quad \dots , \quad s_m := \sum_{k=0}^{m} a_k$$

die sogenannten *Partialsummen* definiert. Diese bilden dann die *Folge der Partialsummen* $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die wieder auf Konvergenz untersucht werden kann. Eine solche Folge der Partialsummen heißt *(unendliche) Reihe*, und für diese schreibt man $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Das Symbol hat eine doppelte Bedeutung: Zum einen ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gleichbedeutend mit der Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $s_m := \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k$. Konvergiert diese Folge, dann meint man mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auch den eindeutig bestimmten Grenzwert der Folge der Partialsummen. Über das Cauchysche Konvergenzkriterium für Folgen erhalten wir:

Satz 7.1 (Cauchy-Kriterium für Reihen) *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß* $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon$ *für alle* $m \geq n > N$.

Beweis. Klar wegen $|s_m - s_{n-1}| = \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|$. □

Daraus ergibt sich, daß aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ auch die Konvergenz von $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ folgt, und umgekehrt (wenn alle a_n definiert sind).

Satz 7.2 *Die geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *konvergiert für* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $0 < |z| < 1$, *und in diesem Fall gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

Beweis. Nach Satz: 2.3 (analog zu beweisen für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$) sind für $z \notin \{0,1\}$ die Partialsummen gegeben durch

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \;,$$

und nach Satz 5.4.iv) ist die Folge $\left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $|z| < 1$ konvergent mit dem angegebenen Grenzwert. □

Beispiel 7.3 (periodische Dezimalbrüche) Für $q = 0.\overline{162} := 162 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-3n}$ gilt $q = \frac{162}{1000} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-3n} = \frac{162}{1000} \cdot \frac{1}{1-10^{-3}} = \frac{162}{999} = \frac{18}{111} = \frac{6}{37}$.

Satz 7.4 *Die harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *ist divergent.*

Beweis. Wir zeigen, daß die Folge der Partialsummen keine Cauchy-Folge ist. Für beliebige $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$s_{2N} - s_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} \,.$$

Wäre $(s_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge, so gäbe es zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s_m| < \frac{1}{2}$ für alle $n, m \geq N$, Widerspruch. □

Es ist im allgemeinen leichter, die Konvergenz einer Reihe zu beweisen, als den Grenzwert konkret anzugeben. Für den Konvergenzbeweis stehen mehrere Kriterien zur Verfügung.

Lemma 7.5 *Sind* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergent, so gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(za_n) = z\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (z \in \mathbb{C}) \,.$$

Beweis. Folgt aus Satz 5.3. □

Lemma 7.6 *Ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent, so bildet* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis. Es sei s der Grenzwert der Reihe. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n > N$. Aus $a_n = s_n - s_{n-1}$ folgt $|a_n - 0| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - s + (s - s_{n-1})| \leq |s_n - s| + |s_{n-1} - s| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. □

Das ist nützlich in negierter Form: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so kann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht konvergent sein. Daraus ergibt sich, daß für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ nicht konvergieren kann, da $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann keine Nullfolge ist.

Die Umkehrung von Lemma 7.6 wäre falsch: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, so kann zunächst nichts über die Konvergenz gesagt werden, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Lemma 7.7 *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *mit positiven reellen Gliedern* $a_n \geq 0$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. Für $a_n \geq 0$ ist die Folge der Partialsummen monoton. □

Beispiel 7.8 *Die folgende Reihe ist konvergent:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Beweis. Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (Partialbruchzerlegung) gilt

$$s_m := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{m+1} \, .$$

Die Folge $(1 - \frac{1}{n+1})_{n \geq 1}$ ist konvergent mit dem angegebenen Grenzwert.

Satz 7.9 *Für* $s \in \mathbb{Q}_+^*$ *ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \begin{cases} \textit{konvergent} & \textit{für } s > 1 \\ \textit{divergent} & \textit{für } s \leq 1 \end{cases}$$

Beweis. Für $s \leq 1$ gilt für die Partialsummen

$$s_n = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \, ,$$

und für die (divergente) harmonische Reihe ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt.

Für $s > 1$ betrachten wir die Teilfolge s_{2^k-1} der Partialsummen. Durch Zusammenfassen der Summanden $a_{2^j}, \ldots a_{2^{j+1}-1}$ entsteht

$$\begin{aligned} s_{2^k-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{7^s}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^s} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^s}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^s} + 4 \cdot \frac{1}{4^s} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{(2^{k-1})^s} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(2^j)^{s-1}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(2^{s-1})^j} = \frac{1 - 2^{(s-1)k}}{1 - 2^{s-1}} < \frac{1}{1 - 2^{s-1}} \, . \end{aligned}$$

Damit ist die Teilfolge $(s_{2^k-1})_{k \geq 1}$ beschränkt. Da jedes $n \in \mathbb{N}$ durch ein $2^k - 1 \geq n$ abgeschätzt werden kann und die Folge der Partialsummen monoton ist, ist auch $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst beschränkt und damit konvergent. $\square$

Die Reihe $\zeta(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ heißt *Riemannsche Zeta-Funktion*, wobei zunächst $z \in \mathbb{Q}$ mit $z > 1$ ist. Später wird sich zeigen, daß die Reihe auch für gewisse $z \in \mathbb{C}$ sinnvoll ist. Über die Grenzwerte können wir zunächst nicht viel sagen. Später werden wir z.B. $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zeigen.

Satz 7.10 (Konvergenzkriterium von Leibniz) *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere $a_n \in \mathbb{R}_+$). Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergend, und für den Grenzwert s gilt $\left|s - \sum_{j=0}^{n}(-1)^j a_j\right| \leq a_{n+1}$.*

Solche Reihen heißen *alternierend.*

Beweis. Für die geraden Partialsummen gilt $s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} < 0$, d.h. die Teilfolge $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Für die ungeraden Partialsummen gilt $s_{2k+3} - s_{2k+1} = -a_{2k+3} + a_{2k+2} > 0$, d.h. die Teilfolge $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Weiter gilt $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} < 0$, d.h. $s_{2k} \geq s_{2k+1} \geq s_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da also $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist, konvergiert die gerade Teilfolge gegen einen Grenzwert s_g, und analog konvergiert $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $s_u \leq s_g$. Nach Satz 5.3 gilt $s_g - s_u = \lim_{k\to\infty}(s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$. Damit konvergiert die gesamte Folge der Partialsummen gegen den gemeinsamen Grenzwert $s = s_g = s_u$.

Die Fehlerabschätzung ergibt sich daraus, daß s zwischen s_k und s_{k+1} liegt und $|s_k - s_{k+1}| = a_{k+1}$. □

Beispiel 7.11 Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$ ist konvergent. Der Grenzwert liegt zwischen $s_1 = \frac{1}{2}$ und $s_0 = 1$. Mit später bereitgestellten Methoden kann man $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = \ln 2$ zeigen.

Die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ ist konvergent. Der Grenzwert liegt zwischen $s_1 = \frac{1}{3}$ und $s_0 = 1$. Mit später bereitgestellten Methoden kann man $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ zeigen.

8 Absolute Konvergenz von Reihen

Definition 8.1 Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Satz 8.2 (Majorantenkriterium) *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen und $p \in \mathbb{N}$ derart, daß $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \geq p$.*

i) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ konvergent, so konvergieren auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, und es* *gilt*

$$\Big|\sum_{n=p}^{\infty} a_n\Big| \le \sum_{n=p}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=p}^{\infty} |b_n|\,.$$

Insbesondere ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent.

ii) *Ist* $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *divergent, so ist auch* $\sum_{n=p}^{\infty} |b_n|$ *divergent.*

Das Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe zeigt, daß aus Konvergenz nicht absolute Konvergenz folgt.

Beweis. ii) folgt aus i) durch Negation.

i) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge p$, so daß $\sum_{k=n}^{m} |b_k| < \epsilon$ für alle $m \ge n > N$. Nach der Dreiecksungleichung gilt für die *endliche Summe*

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} a_k\Big| = |a_n + \cdots + a_m| \le |a_n| + \cdots + |a_m| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n}^{m} |b_k| < \epsilon\,,$$

so daß $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium konvergent sind. Aus Satz 5.6.i) folgt schließlich

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=p}^{\infty} a_n\Big| = \Big|\lim_{m\to\infty}\sum_{n=p}^{m} a_n\Big| &= \lim_{m\to\infty}\Big|\sum_{n=p}^{m} a_n\Big| \\ &\le \lim_{m\to\infty}\sum_{n=p}^{m} |a_n| \quad \begin{cases} = \sum_{n=p}^{\infty} |a_n| \\ \le \lim_{m\to\infty}\sum_{n=p}^{m} |b_n| = \sum_{n=p}^{\infty} |b_n| \end{cases}\end{aligned}$$

□

Beispiel 8.3 i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ist konvergent, da für $n > 2$ gilt:

$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n} \le \frac{2}{n^2}$, und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ ist (absolut) konvergent.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ist divergent, da $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \ge \frac{1}{n+1}$, und die harmonische Reihe ist divergent.

Satz 8.4 (Quotientenkriterium) *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe mit* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *und es gebe ein* $N \in \mathbb{N}$ *und ein* $0 < q < 1$, *so daß* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ *für alle* $n \geq N$. *Dann konvergiert die Reihe absolut.*

Beweis. Für $n \geq N$ gilt dann $|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq \ldots (q)^{n-N}|a_N|$, so daß die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ durch die konvergente Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} q^n \frac{|a_N|}{q^N} = \frac{|a_N|}{1-q}$ majorisiert wird. $\square$

Die Eigenschaft $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für ein $0 < q < 1$ ist automatisch erfüllt, wenn die Folge $(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $\alpha < 1$ konvergiert: Nach Definition des Grenzwertes gibt es dann zu $\alpha < q < 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha + \alpha\right| \leq \alpha + \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha\right| \leq q$ für alle $n \geq N$. Gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 1$, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und die Reihe divergiert.

Wichtig ist, daß das q im Quotientenkriterium unabhängig von n sein muß. Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ mit $s \in \mathbb{Q}_+^*$ ist zwar $\left|(\frac{n}{n+1})^s\right| < 1$ für alle $n \geq 1$, aber zu jedem $q < 1$ findet man ein $N \in \mathbb{N}$ mit $q < \left|(\frac{n}{n+1})^s\right| < 1$ für alle $n \geq N$. Über die Konvergenz kann das Quotientenkriterium in diesem Fall keine Aussage machen. Die Reihe ist für $s > 1$ absolut konvergent und für $s \leq 1$ divergent.

Die Konvergenz der geometrischen Reihe kann nicht mit dem Quotientenkriterium begründet werden!

Beispiel 8.5 (komplexe Binomialreihen) Über $\binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ lassen sich komplexe Binomialkoeffizienten definieren (siehe Aufgabe 1 im Übungsblatt 2 für reelle α). Wir betrachten für $z \in \mathbb{C}$ die zugehörige binomische Reihe

$$B_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n ,$$

die für $\alpha \in \mathbb{N}$ bei $k = \alpha$ abbricht und in die binomische Formel übergeht. Das Quotientenkriterium liefert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha - n}{n+1} \cdot z\right| = |z|$, so daß die binomische Reihe für $|z| < 1$ absolut konvergent ist und für $|z| > 1$ divergiert.

Satz 8.6 (Wurzelkriterium) *Für eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *existiere ein* $N \in \mathbb{N}$ *und ein* $0 < q < 1$, *so daß* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ *für alle* $n \geq N$. *Dann konvergiert die Reihe*

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut.*

Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und die Reihe ist divergent.

Beweis. Die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ besitzt die konvergente Majorante $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$. □

Die Eigenschaft $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für ein $0 < q < 1$ ist automatisch erfüllt, wenn der größte Häufungspunkt von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ kleiner als 1 ist, insbesondere wenn $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\alpha < 1$ konvergiert.

Beispiel 8.7 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist absolut konvergent: Wir betrachten $\sqrt[n]{|n^k z^n|} = \sqrt[n]{n^k}|z|$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\sqrt[n]{n^k} < \frac{2}{1+|z|}$. Damit kann im Wurzelkriterium $q = \frac{2|z|}{1+|z|} < 1$ gewählt werden.

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann nennt man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine *Umordnung* der Reihe. Im Gegensatz zu endlichen Summen gilt das Kommutativgesetz "$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$" nicht immer. Wir zeigen, daß es bei absolut konvergenten Reihen gilt und zumindest für die alternierende harmonische Reihe nicht gilt.

Satz 8.8 (Umordnungssatz) *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine absolut konvergente Reihe. Dann ist auch jede Umordnung dieser Reihe absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.*

Beweis. Es sei $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es wegen der absoluten Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt

$$\Big|s - \sum_{n=0}^{N-1} a_n\Big| = \Big|\sum_{n=N}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Sei nun ein $N' \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\{0, 1, \ldots, N-1\} \subset \{\tau(0), \tau(1), \ldots, \tau(N')\}$, d.h. $N' \geq \max(\tau^{-1}(0), \ldots \tau^{-1}(N-1)\}$. Dann gilt für alle $m \geq N'$ nach der Dreiecksungleichung

$$\Big|\sum_{n=0}^{m} a_{\tau(n)}\Big| \leq \Big|\sum_{n=0}^{m} a_{\tau(n)} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n\Big| + \Big|\sum_{n=0}^{N-1} a_n - s\Big| < \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\ ,$$

denn in $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_{\tau(n)} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n$ heben sich $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ gegeneinander weg und die Summe über die verbleibenden Terme ist wie angegeben beschränkt. Damit konvergiert $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ gegen den gleichen Grenzwert s. Die absolute Konvergenz folgt durch Wiederholung des Beweises für die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\tau(n)}|$. □

Wir zeigen nun am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe, die konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, daß der Umordnungssatz in diesem Fall nicht gilt. Wir betrachten folgende Umordnung:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(n)+1}}{\tau(n)} &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \Big(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{6}\Big) + \Big(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{15} - \tfrac{1}{8}\Big) + \ldots \\ &\quad + \Big(\tfrac{1}{2^n+1} + \tfrac{1}{2^n+3} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n+1}-1} - \tfrac{1}{2n+2}\Big) + \ldots\end{aligned}$$

In dieser Umordnung kommen alle negativ zu zählenden Glieder $\frac{1}{2n+2}$ vor, aber immer mehr verzögert gegenüber den positiven Gliedern. Nun gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\Big(\tfrac{1}{2^n+1} + \tfrac{1}{2^n+3} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n+1}-1} - \tfrac{1}{2n+2}\Big) > 2^{n-1}\tfrac{1}{2^{n+1}} - \tfrac{1}{2n+2} &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2n+2} \\ &\geq \tfrac{1}{12} \quad \text{für } n \geq 2\ .\end{aligned}$$

Wie schon im Divergenzbeweis der harmonischen Reihe ist damit für $\epsilon = \frac{1}{12}$ das Cauchysche Konvergenzkriterium verletzt, so daß die umgeordnete Reihe divergiert. Man kann übrigens für die alternierende harmonische Reihe zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Umordnung derart finden, daß die umgeordnete Reihe gegen x konvergiert.

9 Polynome

Ein Polynom in x mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\ , \qquad a_i \in \mathbb{C}\ .$$

Die Menge aller solcher Polynomome wird mit $\mathbb{C}[x]$ bezeichnet, bzw. mit $\mathbb{R}[x]$ wenn $a_i \in \mathbb{R}$. Die Unbestimmte x werden wir zunächst als $x \in \mathbb{C}$ oder $x \in \mathbb{R}$ auffassen; später werden Verallgemeinerungen wichtig. Es gibt eine offensichtliche Addition

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\Big) := \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i \ ,$$

wobei $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_i = 0$ für $i > m$ gesetzt wird. Das Nullpolynom $f(x) = 0$ (alle a_i verschwinden) ist das neutrale Element. Außerdem erhält man durch Ausmultiplizieren und Ordnen nach Potenzen von x eine Multiplikation

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\Big) := \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k \ , \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \ .$$

(Es wird wieder $a_i = 0$ für $i > n$ und $b_j = 0$ für $j > m$ gesetzt.) Die auftretenden Summanden ergeben sich aus den Diagonalen im folgenden Schema (mit $k = \max(m,n)$):

$$\begin{array}{ccccc}
a_k b_0 & a_k b_1 & & \dots & a_k b_k \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_2 b_0 & & & \dots & a_2 b_k \\
a_1 b_0 & a_1 b_1 & & \dots & a_1 b_k \\
a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \dots & a_0 b_k
\end{array}$$

Für $x = 1$ erhalten wir das folgende Produkt endlicher Summen:

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m} b_j\Big) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k \ , \qquad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{j=\max(0,k-n)}^{\min(k,m)} a_{k-j} b_j$$

Der maximale Exponent von x, für den der Koeffizient in $f(x)$ ungleich Null ist, heißt der *Grad des Polynoms* und wird mit $\deg(f)$ bezeichnet. Genauer ist für $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$$\deg(f) = \begin{cases} -\infty & \text{für } f = 0 \\ \max\{i \in \mathbb{N} \ : \ a_i \neq 0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Konstante, aber nichtverschwindende, Polynome haben den Grad 0. Es gilt

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g)) \ , \qquad \deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

(mit $(-\infty) + n = -\infty$ und $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$).

Satz 9.1 (Division mit Rest) *Sind $f, g \in \mathbb{C}[x]$ und ist $g \neq 0$, dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit*

$$f = q \cdot g + r \,, \qquad \deg(r) < \deg(g) \,.$$

Beweis. i) Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit. Sei $f = q \cdot g + r = q' \cdot g + r'$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ und $\deg(r') < \deg(g)$, dann folgt

$$(q - q') \cdot g = r' - r \,.$$

Wäre $q \neq q'$, dann ist der Grad der linken Seite $\deg((q-q')\cdot g) > \deg(g)$, während der Grad der rechten Seite $\deg(r' - r) < \deg(g)$ ist, Widerspruch. Also ist $q = q'$ und dann $r = r'$.

ii) Existenz der Polynome durch explizite Konstruktion mittels "Division mit Rest". Sei $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $g = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$, mit $a_n, b_m \neq 0$. Für $n < m$ ist $q = 0$ und $r = f$. Sei also $n \geq m$. Wir setzen

$$q_{(1)} := \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \,, \qquad f_{(1)} := f - q_{(1)} \cdot g \,.$$

Da der höchste Koeffizient von f durch Subtraktion entfernt wurde, gilt $\deg(f_{(1)}) < \deg(f)$. Auf diese Weise konstruiert man eine Folge von Monomen $q_{(k)} = c_k x^{i(k)}$, so daß für $f_{(k)} := f_{(k-1)} - q_{(k)} \cdot g$ gilt $\deg(f_{(k)}) < \deg(f_{(k-1)})$. Das Verfahren bricht im l-ten Schritt ab, wenn $\deg(f_{(l)}) < \deg(g)$. Dann ist $r := f_{(l)}$ und $q := q_{(1)} + \cdots + q_{(l)}$. □

Beispiel 9.2 Es sei $f = x^3$ und $g = 2x^2 + x$, also $a_3 = 1$ und $b_2 = 2$. Dann ist $q_{(1)} = \frac{a_3}{b_3} x^{3-2} = \frac{1}{2}x$ und $f_{(1)} = f - \frac{1}{2}x \cdot (2x^2 + x) = -\frac{1}{2}x^2$. Im nächsten Schritt ist $q_{(2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} x^0 = -\frac{1}{4}$ und $f_{(2)} = f_{(1)} + \frac{1}{4} \cdot (2x^2 + x) = \frac{1}{4}x$. Hier bricht das Verfahren ab. Somit gilt $x^3 = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})(2x^2 + x) + \frac{1}{4}x$.

Ist $r = 0$ in Satz 9.1, so heißt g ein *Teiler* von f.

Definition 9.3 Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt *Nullstelle* eines Polynoms $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, wenn $f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_n \alpha^i = 0$.

Satz 9.4 *Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ ist genau dann* Nullstelle *eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[x]$, wenn $x - \alpha$ Teiler von f ist.*

Beweis. Für $\deg(f) = 0$ hat f keine Nullstellen, für $\deg(f) = -\infty$ ist $f = 0$ und $x - \alpha$ ein Teiler für beliebige $\alpha \in \mathbb{C}$. Verbleibt $\deg(f) \geq 1$. Die Division mit Rest liefert eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathbb{C}[x]$ mit $f = q \cdot (x - \alpha) + r$ und $\deg(q) = \deg(f) - 1$, $\deg(r) < \deg(x - \alpha) = 1$, also $r \in \mathbb{C}$. Dann ist $f(\alpha) = r$. □

Hat auch q eine Nullstelle α_2, so läßt sich ein weiterer Linearfaktor $x - \alpha_2$ abspalten, usw. Aus der Abbruchbedingung der Division mit Rest folgt, daß ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ höchstens n Nullstellen haben kann.

Satz 9.5 (Identitätssatz für Polynome) *Stimmen die Werte der Polynome* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *und* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ *an* $n+1$ *verschiedenen Stellen überein, dann gilt* $a_i = b_i$ *für alle* $i = 0, \ldots, n$ *und somit* $f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{C}$.

Beweis. Das Polynom $f - g$ hat $n + 1$ verschiedene Nullstellen und einen Grad $\leq n$. Damit ist $f - g$ das Nullpolynom. □

Der Identitätssatz liefert die sehr wichtige Methode des

9.6 Koeffizientenvergleich. *Gibt es für ein Polynom zwei Darstellungen, so sind die entsprechenden Koeffizienten einander gleich.*

Satz 9.7 (Additionstheorem der Binomialkoeffizienten) *Für alle* $s, t \in \mathbb{C}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n} .$$

Beweis. i) Sei zunächst $s, t \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1+x)^{s+t} = \sum_{n=0}^{s+t} \binom{s+t}{n} x^n$$

$$(1+x)^s \cdot (1+x)^t = \Big(\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} x^k \Big) \Big(\sum_{l=0}^{t} \binom{t}{l} x^l \Big) = \sum_{n=0}^{s+t} \Big(\sum_{k+l=n} \binom{s}{k} \binom{t}{l} \Big) x^n$$

Die Behauptung folgt aus $\sum_{k+l=n} \binom{s}{k} \binom{t}{l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k}$ und Koeffizientenvergleich.

ii) Sei $s \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{N}$. Interpretieren wir beide Seiten des Additionstheorems als Polynome in s, dann stimmen diese nach i) in unendlich vielen Stellen überein, nach dem Identitätssatz dann für alle $s \in \mathbb{C}$.

iii) Für $s, t \in \mathbb{C}$ werden schließlich beide Seiten bei festem s als Polynome in t aufgefaßt, die nach ii) an unendlich vielen Stellen übereinstimmen, damit überall. □

10 Potenzreihen

Potenzreihen sind Verallgemeinerungen von Polynomen auf unendliche Summen, also Reihen, $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und einer Unbestimmten

$z \in \mathbb{C}$. Beispiele sind die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ und die binomische Reihe $B_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$. Später werden auch die in einen anderen Ursprung $z_0 \in \mathbb{C}$ verschobenen Potenzreihen $P(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ betrachtet. Im allgemeinen werden diese Reihen nicht für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren.

Satz 10.1 *Konvergiert eine Potenzreihe* $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *in einem Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$*, dann konvergiert sie absolut in jedem Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < |z_0|$.

Beweis. Die Folge $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist als Nullfolge insbesondere beschränkt, d.h. es gilt $|a_n z_0^n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|a_n z^n| = q^n |a_n z_0^n| \leq q^n S$ mit $q := |\frac{z}{z_0}| < 1$. Damit besitzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} q^n S$, so daß die Reihe für $|z| < |z_0|$ absolut konvergent ist. □

Dieser Satz liefert für jede Potenzreihe $P(z)$ die Existenz eines *Konvergenzkreises* mit Radius

$$R(P) := \sup\{r \in \mathbb{R} \ : \quad P(r) \text{ konvergiert } \} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \, .$$

Man nennt $R(P)$ den *Konvergenzradius* von P.

Satz 10.2 *Die Potenzreihe* P *ist für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < R(P)$ *absolut konvergent und für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| > R(P)$ *divergent.*

Beweis. i) Für $|z| < R(P)$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}$ mit $|z| < r < R(P)$, so daß $P(r)$ konvergent ist. Dann ist $P(z)$ absolut konvergent nach Satz 10.1.

ii) Sei $|z| > R(P)$. Wäre $P(z)$ konvergent, so wäre nach Satz 10.1 $P(r)$ (sogar absolut) konvergent für alle $R(P) < r < |z|$, im Widerspruch zur Supremumseigenschaft von $R(P)$. □

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $P(z)$ kann unendlich sein; in diesem Fall ist $P(z)$ absolut konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$. Der Konvergenzradius $R(P)$ ist 0, wenn $P(z)$ nur für $z = 0$ konvergiert. Die Bestimmung des Konvergenzradius von $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kann über das Wurzelkriterium oder das Quotientenkriterium versucht werden:

i) $R(P) = \frac{1}{q}$, wenn q der größte Häufungswert der Folge $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n\geq 1}$ ist (Cauchy-Hadamard),

ii) $R(P) = \frac{1}{q}$, wenn $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}_{n\geq 1}$ gegen q konvergiert (Euler).

Über Konvergenz von $P(z)$ auf dem Rand des Konvergenzkreises, d.h. für $|z| = R(P)$, kann keine Aussage gemacht werden.

Beispiel 10.3 Für $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist nach Satz 7.2 $R(P) = 1$.

Für $P(z) = B_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ ist nach Beispiel 8.5 $R(P) = 1$.

Für den Polylogarithmus $P(z) = \mathrm{Li}_s(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$ ist $R(P) = 1$.

Absolut konvergente Reihen können nach Satz 8.8 beliebig umgeordnet werden. Dadurch wird es möglich, zwei Reihen innerhalb des gemeinsamen Konvergenzkreises zu multiplizieren und nach gemeinsamen Potenzen von z umzuordnen, ähnlich zum Produkt von Polynomen auf Seite 34:

Satz 10.4 *Konvergieren die Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ im Punkt $z \in \mathbb{C}$ absolut, so gilt*

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \Big) z^n \;.$$

Beweis. Siehe Forster: Analysis 1 (§8 Satz 3) für $z = 1$. Man muß ähnlich zum Beweis des Umordnungssatzes die Reihen entsprechend dem Schema für Summen auf Seite 34 in anderer Reihenfolge aufsummieren. Absolute Konvergenz sichert die Gleichheit der umgeordneten Reihen. □

Beispiel 10.5 (Multiplikation der Binomialreihen) Für alle $s, t \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt nach Satz 9.7

$$B_s(z) \cdot B_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} \Big) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+t}{n} z^n = B_{s+t}(z) \;.$$

Daraus folgt $B_s(x) = (1+x)^s$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und alle $s \in \mathbb{Q}$: Aus $B_p(x) = (1+x)^p$ für $p \in \mathbb{N}$ folgt mit $s = \frac{p}{q}$ und $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\underbrace{B_{\frac{p}{q}}(x) \cdots B_{\frac{p}{q}}(x)}_{q \text{ mal}} = B_p(x) = (1+x)^p \;,$$

also $B_{\frac{p}{q}}(x) = (1+x)^{\frac{p}{q}}$ wegen der Eindeutigkeit der Wurzel reeller Zahlen. Für negative s benutzt man $B_s(x) \cdot B_{-s}(x) = B_0(x) = 1$.

Daraus ergibt sich z.B.

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} x + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{(\frac{1}{2}-1)}{2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{(\frac{1}{2}-1)}{2} \frac{(\frac{1}{2}-2)}{3} x^3 + \ldots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots$$

Als weiteres Beispiel können wir die (sehr wichtige) Exponentialreihe einführen und untersuchen:

Satz 10.6 i) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe* $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *absolut konvergent, und es gilt* $|\exp(z)| \le \exp(|z|)$.

ii) *Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp(w) \cdot \exp(z) = \exp(w+z)$.

iii) *Für $N \in \mathbb{N}$ mit $|z| < 1 + \frac{N}{2}$ gilt* $\left| \exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right| \le \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!}$.

iv) *Es gilt* $\exp(z) = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$, *insbesondere* $e = \exp(1)$.

Beweis. i) Das Quotientenkriterium liefert $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$, damit ist $\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Die Ungleichung $|\exp(z)| \le \exp(|z|)$ folgt aus Satz 8.2.

ii) Für $t \in \mathbb{C}$ ist nach Satz 10.4

$$\exp(wt) \cdot \exp(zt) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z^k}{k!} \Big) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k \Big) t^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+z)^n t^n}{n!} = \exp((w+z)t) .$$

iii) Für $|z| \le \frac{N+2}{2}$ gilt

$$\Big| \exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \Big| = \Big| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Big| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$
$$= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \Big(1 + \frac{|z|}{N+2} + \frac{|z|^2}{(N+2)(N+3)} + \ldots \Big)$$
$$\le \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{|z|}{N+2} \Big)^k \le \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2|z|^{N+1}}{(N+1)!} .$$

iv) Aus ii) folgt $\exp(z) = \big(\exp(\frac{z}{n})\big)^n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\Big|\exp(z) - \big(1+\tfrac{z}{n}\big)^n\Big| &= \Big|\big(\exp(\tfrac{z}{n})\big)^n - \big(1+\tfrac{z}{n}\big)^n\Big| \\
&= \Big|\big(\exp(\tfrac{z}{n}) - (1+\tfrac{z}{n})\big)\sum_{k=0}^{n-1}\big(\exp(\tfrac{z}{n})\big)^k\big(1+\tfrac{z}{n}\big)^{n-k-1}\Big| \\
&\leq \big|\exp(\tfrac{z}{n}) - (1+\tfrac{z}{n})\big|\sum_{k=0}^{n-1}\big(\exp(\tfrac{|z|}{n})\big)^k\big(1+\tfrac{|z|}{n}\big)^{n-k-1} .
\end{aligned}$$

Offenbar gilt $1+\frac{|z|}{n} \leq \exp(\frac{|z|}{n})$ und deshalb

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(\exp(\tfrac{|z|}{n})\big)^k\big(1+\tfrac{|z|}{n}\big)^{n-k-1} \leq n\big(\exp(\tfrac{|z|}{n})\big)^{n-1} \leq n\big(\exp(\tfrac{|z|}{n})\big)^n = n\exp(z) .$$

Schließlich gilt nach iii) für $N=1$ und $|\frac{z}{n}| < \frac{3}{2}$, also $n \geq \frac{3}{2}|z|$,

$$\big|\exp(\tfrac{z}{n}) - (1+\tfrac{z}{n})\big| \leq 2|\frac{|z|^2}{2n^2}$$

und damit $\Big|\exp(z) - \big(1+\frac{z}{n}\big)^n\Big| \leq \dfrac{|z|^2}{n^2}\cdot n\exp(z)$. Für $n\to\infty$ folgt die Behauptung.
□

Diese Eigenschaften haben mehrere Folgerungen.

i) Wegen $\exp(0)=1$ existiert für alle $z\in\mathbb{C}$ das Inverse $\big(\exp(z)\big)^{-1} = \exp(-z)\in\mathbb{C}$, damit ist $\exp(z)\neq 0$ für alle $z\in\mathbb{C}$.

ii) Die Exponentialreihe konvergiert sehr schnell; im Schritt $s_N \to s_{N+1}$ der Partialsummen verbessert sich die Konvergenz um den Faktor $N+2$. Damit kann die Eulersche Zahl e numerisch gut berechnet werden. Die Folge $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ konvergiert viel schlechter.

iii) Es gilt $\exp s = e^s$ für alle $s\in\mathbb{Q}$.

iv) Im Reellen folgt aus $x_1 > x_2 > 0$ die Beziehung $\exp(x_1) > \exp(x_2)$. Über $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ folgt dann $\exp(x_1) > \exp(x_2)$ für alle $x_1 > x_2$. Damit ist die zugehörige reelle Exponentialfunktion streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Restgliedabschätzungen wie bei der Exponentialfunktion werden oft benötigt.

Lemma 10.7 *Eine Potenzreihe* $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *habe einen Konvergenzradius* $R(P) > 0$*. Dann gibt es zu jedem* $0 < r < R(P)$ *und jedem* $p\in\mathbb{N}$ *eine Konstante* $c_p\in\mathbb{R}$*, so daß* $\Big|\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n z^n\Big| < c_p|z|^p$ *für alle* $z\in\mathbb{C}$ *mit* $|z|\leq r$*.*

Beweis. Setze $c_p := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+p}| r^k$. Dann gilt $\left|\sum_{n=p}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \sum_{n=p}^{\infty} |a_n||z|^n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+p}||z|^k|z|^p < c_p|z|^p$. □

Teil III
Funktionen und Stetigkeit

11 Funktionen

Definition 11.1 Unter einer *komplexwertigen Funktion* auf einer Menge X versteht man eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ in eindeutiger Weise eine komplexe Zahl $f(x) \in \mathbb{C}$ zuordnet. Dafür schreibt man $f : X \to \mathbb{C}$ und $x \mapsto f(x)$. Die Menge X heißt *Definitionsbereich*, die Teilmenge $f(X) := \{f(x) \in \mathbb{C} \ : \ x \in X\}$ heißt *Wertebereich* von f. Analog sind reellwertige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ definiert. Als *Graph* von $f : X \to \mathbb{C}$ bezeichnet man die Menge $G(f) := \{(x, f(x)) \ : \ x \in X\} \subset X \times \mathbb{C}$.

Für $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ ist der Graph eine Kurve im $\mathbb{R}^2$.

Die üblichen Rechenregeln für komplexe Zahlen übertragen sich punktweise auf Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ (mit $c \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) := f(x) + g(x) \ , \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \ , \quad (cf)(x) := c \cdot f(x) \ , \\
&\tfrac{f}{g}(x) := \tfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{falls } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in X \ , \\
&\bar{f}(x) := \overline{f(x)} \ , \qquad (\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re}(f(x)) \ , \quad (\operatorname{Im} f)(x) := \operatorname{Im}(f(x)) \ .
\end{aligned}$$

Definition 11.2 Sind $f : X \to \mathbb{C}$ und $g : Y \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(X) \subset Y$, dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : X \to \mathbb{C}$ erklärt durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Beispiel 11.3

i) Polynome $f \in \mathbb{C}[x]$ mit $x \in X \subset \mathbb{C}$, also $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

ii) Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wenn X Teilmenge des Konvergenzkreises (eventuell ohne den Rand) der Potenzreihe ist, z.B. $f(x) = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{C}$ oder $f(x) = B_s(x)$ für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ und $s \in \mathbb{C}$ oder $x \in \,]-1, 1[\, \subset \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{Q}$.

iii) Rationale Funktionen. Sind $f, g \in \mathbb{C}[x]$ Polynome, dann heißt die auf $\mathbb{C} \setminus A$ definierte Funktion $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ eine *rationale Funktion*, wobei $A \subset \mathbb{C}$ alle Nullstellen von g enthält. Durch Polynomdivision läßt sich der Definitionsbereich maximal erweitern.

iv) Potenzfunktion mit rationalen Exponenten: Ist $X \subset \mathbb{R}_+$ und $s \in \mathbb{Q}$, dann wird durch $f : x \mapsto x^s$ die Potenzfunktion $f : X \to \mathbb{R}_+$ definiert

v) Zusammensetzungen dieser Funktionen, wenn Definitions- und Wertebereich passen, z.B. $f : x \mapsto x^2 + 2x + 3$ für $x \in \mathbb{R}$ (reelles Polynom ohne Nullstelle) und $g : y \mapsto \sqrt{y}$ für $y \in \mathbb{R}_+$, dann ist $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

vi) Die Bildung von Real- und Imaginärteil sind Funktionen $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Die Bildung des Betrags ist eine Funktion $\mathrm{abs} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$.

Für rationale Funktionen gilt

Satz 11.4 (Partialbruchzerlegung) *Für $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ und $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $f(x) = \alpha_0(x-\alpha_1)^{\nu_1} \cdots (x-\alpha_n)^{\nu_n}$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = \nu_1 + \dots + \nu_n$. Dann gibt es zu $g \in \mathbb{C}[x]$ ein eindeutig bestimmtes Polynom q vom Grad $\deg(g) - \deg(\mathrm{f})$ (mit $q = 0$ falls $\deg(g) < \deg(\mathrm{f})$) und eindeutig bestimmte Koeffizienten $b_{k,j_k} \in \mathbb{C}$ mit $k = 1, \dots, n$ und $j_k = 1, \dots \nu_k$, so daß für alle $x \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ gilt*

$$\frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_k=1}^{\nu_k} \frac{b_{k,j_k}}{(x-\alpha_k)^{j_k}} = q(x) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{b_{k,1}}{(x-\alpha_k)^1} + \frac{b_{k,2}}{(x-\alpha_k)^2} + \dots + \frac{b_{k,\nu_k}}{(x-\alpha_k)^{\nu_k}} \Big) .$$

Diese Darstellung heißt Partialbruchzerlegung.

Beweis. Das Polynom q wird durch Division mit Rest erhalten, $g = q \cdot f + r$. Damit genügt es, den Satz für rationale Funktionen $\frac{g}{f}$ mit $\deg(g) < \deg(f)$ und $q = 0$ zu beweisen. Für $r = 1$ ist dieser Beweis die Übungsaufgabe 2a von Blatt 7, der sich dann auf den allgemeinen Fall übertragen läßt. □

Definition 11.5 Es sei $X \subset \mathbb{C}$.

i) Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt *injektiv*, wenn aus $f(x) = f(y)$ folgt $x = y \in X$.

ii) Ist $f : X \to \mathbb{C}$ injektiv, dann heißt die eindeutig bestimmte Vorschrift g, die jedem $y \in f(X)$ das *Urbild* $x \in X$ mit $g(f(x)) = x$ zuordnet, die *Umkehrfunktion* zu f.

Definition 11.6 Sei $X \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt

i) *monoton wachsend* bzw. *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) \le f(y)$;

ii) *monoton fallend* bzw. *streng monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x < y$ gilt $f(x) > f(y)$ bzw. $f(x) \ge f(y)$;

iii) *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Jede streng monotone (reellwertige) Funktion auf $X \subset \mathbb{R}$ ist injektiv und besitzt damit eine Umkehrfunktion $g : f(X) \to \mathbb{R}$, die im gleichen Sinn streng monoton ist. In diesem Fall gehen die Graphen von f und g durch Spiegelung an der Diagonalen $y = x$ auseinander hervor:

$$G(f) = \{(x,y) \,:\, y = f(x) \,,\, x \in X\} \quad \Leftrightarrow \quad G(g) = \{(y,x) \,:\, y = f(x) \,,\, x \in X\} \,.$$

12 Stetigkeit

12.1 Definition und Beispiele

Bisher war der Definitionsbereich einer Funktion eine beliebige Menge X. Wir werden nun zusätzliche Informationen über die Funktion erarbeiten für den Fall, daß der Definitionsbereich eine Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ oder $D \subset \mathbb{R}$ ist.

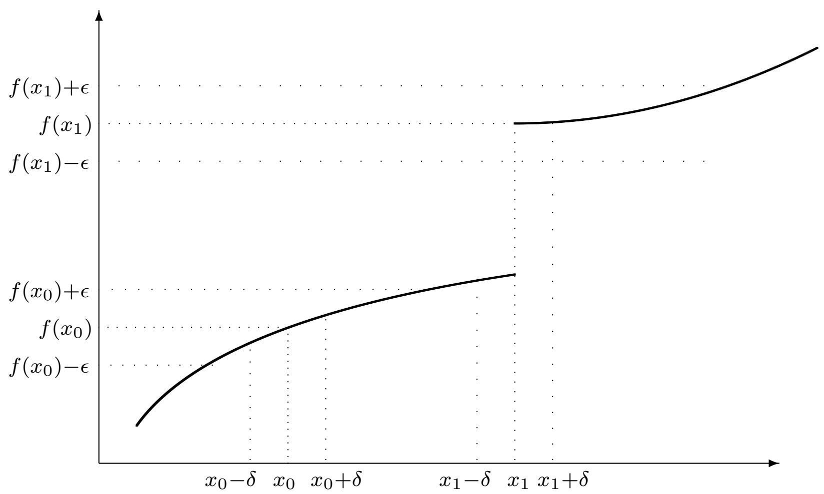
Definition 12.1 (Stetigkeit) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \,.$$

Eine Funktion f heißt stetig in D, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Zu beachten ist, daß δ von ϵ und im allgemeinen auch von x_0 abhängt: wird ϵ verkleinert, so muß im allgemeinen auch δ verkleinert werden, damit die Relationen richtig bleiben. Die Stetigkeitsforderung besagt, daß das immer möglich ist.

Wir diskutieren die geometrische Bedeutung der Definition für eine reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$.



Die abgebildete Funktion ist stetig in x_0, aber unstetig in x_1. Denn für die abgebildete Wahl von ϵ ist zu *jeder Wahl* von $\delta > 0$ das Bild des Intervalls $]x_1 - \delta, x_1 + \delta[$ *nicht enthalten*[1] im Intervall $]f(x_1) - \epsilon, f(x_1) + \epsilon[$.

Beispiel 12.2 *Die Funktion $f(z) = z^2$ ist stetig in ganz $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest gewählt und $\epsilon > 0$ beliebig. Es gilt $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |z - z_0|\,|z + z_0| \leq |z - z_0|(|z - z_0| + 2|z_0|)$. Es genügt deshalb, $\delta(\delta + 2|z_0|) \leq \epsilon$ zu wählen, z.B. $\delta := \min(1, \frac{\epsilon}{1+2|z_0|})$. $\square$

[1]Das Beispiel zeigt auch, daß die Formulierung der Stetigkeit in x_1 *nicht* lautet: Aus $|f(x) - f(x_1)| < \epsilon$ folgt $|x - x_1| < \delta$. So etwas wäre erfüllt.

Beispiel 12.3 *Die Funktion $f(z) = \exp(z)$ ist stetig in ganz $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest gewählt und $\epsilon > 0$ beliebig. Es gilt

$$|\exp(z) - \exp(z_0)| = |\exp(z_0) \cdot (\exp(z - z_0) - 1)| \leq \exp(|z_0|)|\exp(z - z_0) - 1| .$$

Nach der Abschätzung in Satz 10.6.iii) für $N = 0$ gilt für $|z - z_0| < 1$ die Relation $|\exp(z - z_0) - 1| < 2|z - z_0|$. Somit genügt es, $\delta := \min(1, \frac{\epsilon}{2\exp(|z_0|)}$ zu wählen. □

Beispiel 12.4 Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gebe es eine Konstante $L \geq 0$, so daß $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in D$. Eine solche Funktion heißt *Lipschitz-stetig*. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig: Man wähle $\delta := \frac{\epsilon}{L}$ für $L \neq 0$ und $\delta = 1$ für $L = 0$.

Insbesondere sind folgende Funktionen stetig:

i) die konstante Funktion $f(x) = c$ (mit $L = 0$),

ii) lineare Funktionen $f(x) = ax + b$ (mit $L = |a|$),

iii) $f(x) = |x|$, $f(x) = \mathrm{Re}(x)$, $f(x) = \mathrm{Im}(x)$, $f(x) = \overline{x}$ jeweils mit $L = 1$

Beispiel 12.5 *Für $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist die Wurzelfunktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) := \sqrt[k]{x}$ stetig.*

Beweis. Sei $x_0 > 0$. Für $y \geq 0$ gilt $y^k \leq (1+y)^k - 1$, also $(\sqrt[k]{\frac{x}{x_0}} - 1)^k \leq \frac{x}{x_0} - 1$ und $\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0} \leq \sqrt[k]{x - x_0}$ für $x \geq x_0$ bzw. (Tausch $x_0 \leftrightarrow x$) $|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}| \leq \sqrt[k]{|x - x_0|}$ für alle $x, x_0 \in \mathbb{R}_+$. Dann genügt es, $\delta = \epsilon^k$ zu wählen. □

Ein historisch bedeutsames Beispiel ist die nirgends stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

12.2 Folgenkriterium der Stetigkeit

Satz 12.6 (Folgenkriterium der Stetigkeit) *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in $\tilde{x} \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\tilde{x})$.*

Beweis. i) Sei f stetig in $\tilde{x}$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(\tilde{x})| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige gegen $\tilde{x}$ konvergente Folge in D, dann gibt es nach Definition des Grtenzwertes ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|x_n - \tilde{x}| < \delta$ für alle $n \geq N$. Also ist $|f(x_n) - f(\tilde{x})| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ wegen der Stetigkeit von f in $\tilde{x}$, und $f(\tilde{x})$ ist Grenzwert der Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Sei die Folgenbedingung erfüllt. Angenommen, f wäre nicht stetig in $\tilde{x}$. Das bedeutet: Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ gilt: Aus $|x - \tilde{x}| < \delta$ folgt $|f(x) - f(\tilde{x})| \geq \epsilon$. Wähle $\delta = \frac{1}{n+1}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in D$ mit $|x_n - \tilde{x}| < \frac{1}{n+1}$. Damit gibt es eine gegen $\tilde{x}$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die gilt $|f(x_n) - f(\tilde{x})| \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\tilde{x})$. □

Definition 12.7 Eine *Umgebung* V eines Punktes $\tilde{x} \in D$ ist eine Teilmenge $V \subset D$, die eine Menge der Gestalt $D \cap K_\epsilon(\tilde{x})$ enthält; dabei ist $K_\epsilon(\tilde{x}) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \tilde{x}| < \epsilon\} \subset \mathbb{C}$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\tilde{x}$ und Radius $\epsilon > 0$.

Die Rechenregeln für Grenzwerte aus Satz 5.3 übertragen sich auf stetige Funktionen:

Satz 12.8 *Die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ seien stetig in $\tilde{x} \in D$. Dann gilt:*

i) *Die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ sind stetig in $\tilde{x}$.*

ii) *Ist $g(\tilde{x}) \neq 0$, so ist auch $g(x) \neq 0$ in einer Umgebung $V \subset D$ von $\tilde{x}$, und die Funktion $\frac{f}{g} : V \to \mathbb{C}$ ist stetig in $\tilde{x} \in V$.*

iii) *Ist die Komposition $g \circ f$ definiert und sind $f : D \to \mathbb{C}$ stetig in $\tilde{x}$ und $g : D' \to \mathbb{C}$ mit $f(D) \subset D'$ stetig in $f(\tilde{x})$, dann ist auch $g \circ f$ stetig in $\tilde{x}$.*

Beweis. i) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\tilde{x})$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\tilde{x})$. Satz 5.3 liefert $\lim_{n\to\infty}(f + g)(x_n) = (f + g)(\tilde{x})$ und $\lim_{n\to\infty}(f \cdot g)(x_n) = (f \cdot g)(\tilde{x})$. Nach dem Folgenkriterium sind dann $f + g$ und $f \cdot g$ stetig.

ii) Wir zeigen: Ist g stetig in $\tilde{x} \in D$, dann ist $V := \{x \in D \,:\, |g(x)| \geq \frac{1}{2}g(\tilde{x})\} \subset D$ eine Umgebung von $\tilde{x}$. Für $g(x_0) = 0$ ist $V = D$, ansonsten gibt es zu $\epsilon = \frac{1}{2}g(\tilde{x})$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$ gilt $|g(x) - g(\tilde{x})| < \epsilon$. Dann gilt (Lemma 3.9)

$$|g(x)| \geq \big|\,|g(\tilde{x})| - |g(x) - g(\tilde{x})|\,\big| \geq \frac{1}{2}|g(\tilde{x})| \qquad \text{für } |x - \tilde{x}| < \delta\ .$$

Somit ist $D \cap \{x \in \mathbb{C} \,:\, |x - \tilde{x}| < \delta\} \subset V$. Zum Beweis der Behauptung genügt es zu bemerken, daß $x_n \in V$ für alle $n \geq N \in \mathbb{N}$ gilt. Damit konvergiert $(\frac{f}{g}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{f}{g}(\tilde{x})$.

iii) Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\tilde{x}$, dann konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(\tilde{x})$ und schließlich $(g(f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $g(f(\tilde{x}))$. □

Einige Folgerungen:

i) Jedes Polynom ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

ii) Jede rationale Funktion ist stetig auf ihrem Definitionsbereich.

iii) Die reellwertige Funktion $f(x) = x^s$ für $x \in \mathbb{R}^*_+$ und $s \in \mathbb{Q}$ ist stetig.

iv) Mit f sind auch $|f|$, $\overline{f}$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig als Komposition mit den stetigen Funktionen $g(y) = |y|$ usw.

v) Für stetige Funktionen f, g sind auch $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ stetig.

Satz 12.9 *Jede Potenzreihe* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *ist im Inneren ihres Konvergenzkreises stetig.*

Beweis. Es sei $R(f)$ der Konvergenzradius von $f(z)$ und $|z_0| < r < R(f)$. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n < \frac{\epsilon}{3}$. Da das Polynom $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$ stetig ist, gibt es ein $r - |z_0| > \delta > 0$, so daß $\Big|\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z_0^n\Big| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$. Dann ist $|z| \leq |z - z_0| + |z_0| < \delta + |z_0| < r$, so daß

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \Big|\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z_0^n\Big| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z_0| < \epsilon . \qquad \square$$

12.3 Funktionsfolgen

Wir betrachten nun Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$. Eine solche Folge heißt *punktweise konvergent*, wenn in jedem Punkt $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionswerte konvergiert. In diesem Fall wird punktweise durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) , \qquad x \in D ,$$

die *Grenzfunktion* $f : D \to \mathbb{C}$ definiert. Diese ist im allgemeinen aber nicht stetig:

Beispiel 12.10 Durch $f_n(x) := x^n$ für $x \in [0, 1]$ ist eine Folge stetiger Funktionen gegeben. Die punktweise gebildete Grenzfunktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

existiert, aber sie ist unstetig im Punkt $1 \in [0, 1]$.

Definition 12.11 Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$.

Satz 12.12 *Eine Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *stetiger Funktionen konvergiere gleichmäßig gegen die Grenzfunktion* $f : D \to \mathbb{C}$. *Dann ist* f *stetig.*

Beweis. Wir zeigen, daß f in jedem Punkt $\tilde{x} \in D$ stetig ist. Zu $\epsilon > 0$ gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$. Da f_n in $\tilde{x}$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f_n(x) - f_n(\tilde{x})| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\tilde{x})| + |f_n(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| < \epsilon$$

für alle $x \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$. □

13 Grenzwerte von Funktionen

Stetigkeit ist eng verbunden mit dem Begriff des Grenzwertes für Funktionen.

Definition 13.1 Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt einer Menge* $D \subset \mathbb{C}$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt: Die ϵ-Umgebung $K_\epsilon(x_0) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |x_0 - z| < \epsilon\}$ enthält unendlich viele Punkte aus D.

Ein Häufungspunkt von D ist nicht notwendigerweise in D enthalten. Für die offene Kreisscheibe $D = K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |a - z| < r\}$ sind alle Punkte des abgeschlossenen Kreises $\overline{K_r(a)} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |a - z| \leq r\}$ Häufungspunkte, aber die Randpunkte $|z - a| = r$ gehören nicht zu D.

Definition 13.2 Es sei $\tilde{x} \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat in $\tilde{x}$ den *Grenzwert* a, wenn

i) es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - \tilde{x}| < \delta$, oder

ii) für *jede* Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

In diesem Fall schreibt man $a = \lim\limits_{x \to \tilde{x}} f(x)$.

Wie im Satz 12.6 sind beide Versionen i) und ii) des Grenzwertes äquivalent. Gehört $\tilde{x}$ zum Definitionsbereich von f, dann ist f nach Satz 12.6 in $\tilde{x}$ genau dann stetig, wenn $\lim_{x\to\tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x})$. Damit gibt es folgende Möglichkeiten für Unstetigkeiten einer Funktion f im Punkt $\tilde{x}$:

i) f hat in $\tilde{x}$ keinen Grenzwert,

ii) f hat in $\tilde{x}$ einen Grenzwert ungleich $f(\tilde{x})$.

Die Bedeutung des Grenzwertes von Funktionen besteht darin, daß man Funktionen unter Umständen stetig über den Definitionsbereich hinaus *fortsetzen* kann.

Beispiel 13.3 Für $z \in D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei $f(z) = \frac{\exp(cz)-1}{z}$ für $c \in \mathbb{C}$. Wir zeigen: $\lim_{z\to 0} f(z) = c$. Auf D gilt

$$\frac{\exp(cz) - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cz)^n}{zn!} = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(cz)^k}{(k+1)!} \ .$$

Nach Lemma 10.7 gibt es zu $r=1$ ein $c_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\Big|\frac{\exp(cz)-1}{z} - c\Big| \leq \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(cz)^k}{(k+1)!}\Big| < c_1|z| \; .$$

für alle $|z|<1$. Wähle $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{c_1})$.

Man kann übrigens beweisen, daß $f(z) = \exp(cz)$ die einzige Lösung der beiden Bedingungen $f(w)f(z) = f(w+z)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-1}{z} = c$ ist (siehe Königsberger, *Analysis 1*, §8.1).

Damit ist die Funktion $F(z) = \begin{cases} \dfrac{\exp(cz)-1}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ c & \text{für } z = 0 \end{cases}$ stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

Für des Rechnen mit Grenzwerten gelten die üblichen Regeln (der Beweis ist ähnlich wie in Satz 5.3 und Satz 12.8.

Satz 13.4 *Gilt* $\lim_{x\to\tilde{x}} f(x) = a$ *und* $\lim_{x\to\tilde{x}} g(x) = b$*, so folgt* $\lim_{x\to\tilde{x}} (f+g)(x) = a+b$*,* $\lim_{x\to\tilde{x}} (f\cdot g)(x) = a\cdot b$ *und, falls* $b \neq 0$*,* $\lim_{x\to\tilde{x}} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$*.*

Ist die Komposition $g\circ f$ *definiert und ist* $\lim_{x\to\tilde{x}} f(x) = a$ *und* g *stetig in* a*, dann folgt* $\lim_{x\to\tilde{x}} g\circ f(x) = g(a)$*.*

Im Reellen kann man zusätzlich einseitige Grenzwerte definieren:

Definition 13.5 Es sei $\tilde{x}$ ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ und $D_- := D \cap \,]-\infty, \tilde{x}[$ und $D_+ := D \cap \,]\tilde{x}, \infty[$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat in $\tilde{x}$ *linksseitig* bzw. *rechtsseitig* den Grenzwert a, falls die Einschränkung von f auf D_- bzw. D_+ den Grenzwert a hat. In diesem Fall schreibt man

$$a = \lim_{x\nearrow\tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x}-) \qquad \text{bzw.} \qquad a = \lim_{x\searrow\tilde{x}} f(x) = f(\tilde{x}+) \; .$$

Ist $\tilde{x} \in D$ und $f(\tilde{x}) = f(\tilde{x}-)$ bzw. $f(\tilde{x}) = f(\tilde{x}+)$, dann heißt f in $\tilde{x}$ *linksseitig* bzw. *rechtsseitig* stetig.

Beispiel 13.6 Es sei $f(x) = [x] \in \mathbb{Z}$ der *ganze Teil* einer reellen Zahl x, d.h. $[x] = \sup\{g \in \mathbb{Z} \;:\; g \leq x\}$. Dann hat f in $g \in \mathbb{Z}$ linksseitig den Grenzwert $g-1$ und rechtsseitig den Grenzwert g und ist rechtsseitig stetig.

Über die einseitigen Grenzwerte kann man den Grenzwert einer im Reellen definierten Funktion in $\pm\infty$ definieren:

Definition 13.7 Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ sei nach oben unbeschränkt. Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt Grenzwert von f in ∞, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt mit $|f(x)-a| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $x > N$. In diesem Fall schreibt man $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Analog ist ein Grenzwert in $-\infty$ definiert.

Beispiel 13.8 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}$ für $x\geq 0$.

Beweis. Für $x>1$ gilt unter Verwendung der Binomialreihe

$$\sqrt{x^2+x}-x=x\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\Big)=x\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}\frac{1}{x^k}$$

Da der Konvergenzradius gleich 1 ist, gibt es nach Lemma 10.7 ein $c_1\in\mathbb{R}$ mit $\Big|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}\frac{1}{x^k}\Big|<c_1\frac{1}{x}$ für alle $x>1$. □

Dieses Beispiel demonstriert bereits das allgemeine Prinzip der Zurückführung von Grenzwerten in ∞ auf Grenzwerte in 0:

Lemma 13.9 *Setzt man $g(\xi)=f(\frac{1}{\xi})$ für $\frac{1}{\xi}\in D$, dann gilt: f besitzt genau dann in ∞ einen Grenzwert, wenn g rechtsseitig in 0 einen Grenzwert besitzt, und dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=g(0+)$.*

Analog gilt gegebenenfalls $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=g(0-)$.

Schließlich führen wir $\pm\infty$ als uneigentliche Grenzwerte reellwertiger Funktionen ein:

Definition 13.10 Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ hat in $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ den *uneigentlichen Grenzwert* ∞ bzw. $-\infty$, wenn es zu jedem $M\in\mathbb{R}$ eine Umgebung $V\subset D\setminus\{x_0\}$ gibt, so daß für alle $x\in V$ gilt $f(x)>M$ bzw. $f(x)<M$.

Beispiel 13.11 Für Polynome $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ mit $n\geq 1$ gilt

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}\infty & \text{falls } a_n>0\\ -\infty & \text{falls } a_n<0\end{cases}$$

Ist $a_n>0$, so gilt

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}\infty & \text{falls } n \text{ gerade}\\ -\infty & \text{falls } n \text{ ungerade}\end{cases}$$

Für $a_n<0$ tauschen sich die Vorzeichen.

14 Stetige Funktionen auf Intervallen und auf kompakten Mengen

14.1 Zwischenwertsatz

Satz 14.1 (Zwischenwertsatz) *Es seien $a<b$ reelle Zahlen und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $\gamma\in[f(a),f(b)]$ bzw. $\gamma\in[f(b),f(a)]$ ein $c\in[a,b]$ mit $\gamma=f(c)$.*

Beweis. (für $f(a) < f(b)$) Durch Intervallhalbierung konstruiert man eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = a$, $b_0 = b$ und $|[a_n, b_n]| = \frac{1}{2^n}|[a, b]|$, so daß $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den in jedem Intervall enthaltenen Punkt $c \in [a_n, b_n]$. Wegen der Stetigkeit von f gilt

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq \gamma \qquad \text{und} \qquad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq \gamma ,$$

also $f(c) = \gamma$. □

Der Zwischenwertsatz beschreibt die anschauliche Tatsache, daß man stetige Funktionen lückenlos durchzeichnen kann. Das ist eine weitere Version der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Der Zwischenwertsatz ist nützlich in vielen Existenzbeweisen:

Satz 14.2 (Existenz n-ter Wurzeln) *Jedes reelle Polynom $P(x) = x^n - \alpha$ mit $\alpha > 0$ hat eine positive Nullstelle.*

Beweis. Es ist $P(0) = -\alpha < 0$ und $P(1 + \alpha) = (1 + \alpha)^n - 1 > 0$ (binomische Formel). Da Polynome stetig sind, hat P in $[0, 1 + \alpha]$ mindestens eine Nullstelle y mit $y^n = \alpha$. □

Die Eindeutigkeit der Nullstelle ergibt sich aus der Monotonie von $P(x)$.

Satz 14.3 *Jedes reelle Polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} a_i x^i$ ungeraden Grades ($a_{2n+1} \neq 0$) besitzt in $\mathbb{R}$ mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. (für $a_{2n+1} > 0$) Wegen $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ gibt es reelle Zahlen $a < b$ mit $P(a) < 0$ und $P(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es mindestens eine Punkt $c \in [a, b]$ mit $P(c) = 0$. □

Satz 14.4 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (möglicherweise unbeschränktes) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Beweis. Sei $B := \sup_{x\in I} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $A := \inf_{x\in I} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Wir zeigen: $]A, B[\subset f(I)$. Sei $y \in]A, B[$ beliebig. Dann gibt es $a, b \in I$ mit $f(a) < y < f(b)$, und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in I$ mit $f(x) = y$. Je nachdem, ob Supremum und Infimum angenommen werden, ist $f(I)$ somit eines der Intervalle $]A, B[$, $[A, B[$, $]A, B]$ oder $[A, B]$. □

Satz 14.5 *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige streng monotone Funktion. Dann bildet f das Intervall D bijektiv auf das Intervall $D' := f(D)$ ab, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : D' \to D$ ist ebenfalls streng monoton (im gleichen Sinn) und stetig.*

Beweis. Nach Satz 14.4 ist $D' := f(D)$ ein Intervall, so daß f als streng monotone Funktion D bijektiv auf D' abbildet. Wir beweisen die Stetigkeit von f^{-1} für f streng monoton wachsend. Sei zunächst $b \in D'$ ein innerer Punkt. Dann ist auch $a := f^{-1}(b)$ ein innerer Punkt. Sei $\epsilon > 0$ derart, daß $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset D$. Mit $b_1 := f(a-\epsilon)$ und $b_2 := f(a+\epsilon)$ gilt $b_1 < b < b_2$, und f bildet $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ bijektiv auf $[b_1, b_2]$ ab. Also bildet f^{-1} das Intervall $[b_1, b_2]$ bijektiv auf $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ ab. Somit gilt für $\delta := \min(b-b_1, b_2-b)$, daß $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \epsilon$ für alle $y \in D'$ mit $|y-b| < \delta$, d.h. f^{-1} ist stetig in jedem inneren Punkt von D'. Ist b Randpunkt von D', so ist auch $a = f^{-1}(b)$ Randpunkt von D, und der Beweis verläuft analog über die Intervalle $[a, a+\epsilon]$ bzw. $[a-\epsilon, a]$. □

14.2 Satz vom Maximum/Minimum

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben besondere Eigenschaften. Wir geben hier nicht die allgemeine Definition kompakter Mengen, sondern nutzen die Tatsache, daß kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ genau die beschränkten abgeschlossenen Mengen sind.

Definition 14.6 Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ oder $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn der Grenzwert jeder in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in A$ ebenfalls in A liegt. Außerdem wird die leere Menge als abgeschlossen definiert.

Man kann zeigen, daß die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind.

Definition 14.7 Eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ bzw. $K \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist (K beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}$ mit $|z| \leq M$ für alle $z \in K$). Außerdem wird die leere Menge als kompakt definiert.

Satz 14.8 (vom Maximum und Minimum) *Es sei $K \subset \mathbb{C}$ bzw. $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge. Dann gilt: Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. es gibt Punkte $p, q \in K$ mit*

$$f(p) = \sup_{x\in K} f(x) \ , \qquad f(q) = \inf_{x\in K} f(x) \ .$$

Beweis. (für das Maximum) Es sei $s := \sup_{x\in M} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in K$ mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = s$ (eventuell uneigentlich). Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen der Abgeschlossenheit von K liegt dieser Grenzwert in K, d.h. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: p$. Wegen der Stetigkeit von f gilt $f(p) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = s$, d.h. f ist nach oben beschränkt und nimmt das Maximum in p an. Analog für das Minimum. □

Für komplexwertige Funktionen gibt es kein Minimum/Maximum; es gilt aber

folgende Verallgemeinerung, die wir nicht beweisen:
Das Bild $f(K)$ einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}$ unter einer stetigen Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ ist ebenfalls kompakt.

Der Satz vom Minimum/Maximum ist ein mächtiges Hilfsmittel in Beweisen. Wir können hier einen Beweis angeben für den

Satz 14.9 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. Es genügt, das Polynom $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0$ zu betrachten.
i) Wir zeigen: $|P|$ *nimmt auf* $\mathbb{C}$ *ein Minimum an.* Für $|z| \geq 1$ gilt:

$$P(z) = z^n(1 + r(z)) \;, \qquad r(z) := \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \;,$$
$$|r(z)| \leq \frac{A}{|z|} \text{ mit } A := |a_{n-1}| + \dots + |a_0| \;.$$

Damit gilt $|r(z)| \leq \frac{1}{2}$ für $|z| \geq R := \max(1, 2A)$ und weiter $|P(z)| \geq \frac{|z|}{2} \geq A$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Auf der kompakten Kreisscheibe $\overline{K_0(R)}$ um 0 mit Radius R nimmt die stetige Funktion $|P(z)|$ ein Minimum an, wegen $|P(0)| = |a_0| \leq A$ ist dieses dann das Minimum in ganz $\mathbb{C}$.

ii) Wir zeigen: *Ist $P(z_0) \neq 0$, dann hat $|P(z)|$ in z_0 kein Minimum.* (Also wird das Minimum $|P(z_0)| = 0$ in einem Punkt $z_0 \in \overline{K_0(R)}$ angenommen.)
Dazu betrachten wir das Polynom $Q(w) := \frac{P(w+z_0)}{P(z_0)}$. Wegen $Q(0) = 1$ gilt $Q(w) = 1 + b_1 w^1 + \dots + b_n w^n$. Da P nicht konstant ist, verschwinden nicht alle b_i. Sei $1 \leq k \leq n$ der kleinste Index mit $b_k \neq 0$. Durch Skalieren[2] $w \mapsto \beta w$ mit $\beta^k = -\frac{1}{b_k}$ erreicht man $Q(\beta w) = 1 - w^k + w^{k+1}Q'(w)$ für ein neues Polynom $Q'(w)$. Dieses ist auf $\overline{K_0(R)}$ beschränkt: $|Q'(w)| \leq c$ mit $c > 0$. Somit gilt $|w^{k+1}Q'(w)| < |w|^k$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $0 < |w| < \min(1, \frac{1}{c}, R)$. Wählt man $w_0 \in \mathbb{R}$ mit $0 < w_0 < \min(1, \frac{1}{c}, R)$, so ergibt sich

$$|P(\beta w_0)| \leq 1 - w_0^k + |w_0^{k+1}Q'(w_0)| < 1 \;,$$

also $|P(z + \beta w_0)| < |P(z_0)|$. □

14.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 14.10 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf D, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ für alle $x, x' \in$ mit $|x - x'| < \delta$.

[2] Eine komplexe Zahl $b \neq 0$ schreibt sich als $b = |b|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, dann gilt $\beta^k = b$ für $\beta := \sqrt[k]{|b|}(\cos\frac{\alpha}{k} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{k})$.

Der Unterschied zur bisher betrachteten Stetigkeit (Definition 12.1) ist, daß δ nur von ϵ, nicht aber von einem Punkt aus D abhängt. In den Beispielen 12.2 und 12.3 hatten wir jeweils eine z_0-Abhängigkeit von δ erhalten. Die Beispiele 12.4 und 12.5 sind gleichmäßig stetig.

Satz 14.11 *Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ auf einer kompakten Menge K ist sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig auf K, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$, insbesondere für $\delta = \frac{1}{n+1}$ gilt: Es gibt $x = x_n, x' = x'_n \in K$ mit $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n+1}$ und $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$. Wegen der Beschränktheit von K besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und wegen der Abgeschlossenheit von K liegt ihr Grenzwert ξ in K. Wegen $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n+1}$ konvergiert auch $(x'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert ξ. Da f stetig ist, gibt es nach dem Folgenkriterium ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f(x_{n_k}) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|f(x'_{n_k}) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $k \geq N$. Dann ist nach Dreiecksungleichung $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(\xi)| + |f(x'_{n_k}) - f(\xi)| < \epsilon$, im Widerspruch zur Annahme, daß f nicht gleichmäßig stetig ist. □

Beispiel 14.12 Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig in jedem Punkt $x \in \,]0, 1]$, aber nicht gleichmäßig stetig: Zu $\epsilon = 1$ und $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ gilt für $x_n = \frac{\delta}{2}$ und $x'_n = \delta$ einerseits $|x - x'| < \frac{1}{n+1}$ und andererseits $|f(x_n) - f(x'_n)| = n + 1 \geq 1$.

15 Die Exponentialfunktion

15.1 Logarithmus und komplexe Potenzen

Die Exponentialfunktion $\exp(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist nach Beispiel 12.3 in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig. Insbesondere ist auch die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und nach Bemerkung iv) im Anschluß an Satz 10.6 streng monoton wachsend. Wegen $\exp(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ nimmt exp auf $\mathbb{R}_+$ jeden Wert $y \geq 1$ genau einmal an. Dann folgt aus $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, daß exp auf $\mathbb{R}_-$ jeden Wert $0 < y \leq 1$ genau einmal annimmt, d.h. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ ist bijektiv. Somit existiert die Umkehrfunktion, der (natürliche) *Logarithmus*:

$$\ln : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \quad \ln(x) := \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exp(y) = x\} ,$$

und nach Satz 14.5 ist $\ln : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Speziell ist $\ln(1) = 0$.

Satz 15.1 *Es gilt die Funktionalgleichung* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^*_+$ *sowie* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

Beweis. i) Setze $\xi := \ln(x)$ und $\eta := \ln y$, dann ist $\exp(\xi + \eta) = \exp(\xi) \cdot \exp(\eta) = x \cdot y$. Einsetzen in ln liefert die Behauptung.

ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$ für alle n und $y_n := \ln(1+x_n)$. Wegen $\ln(1) = 0$ ist auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann gilt $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = \frac{y_n}{\exp(y_n)-1}$, und nach Beispiel 13.3 konvergiert $(\frac{y_n}{\exp(y_n)-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1. □

Die Funktionalgleichung des Logarithmus führt auf folgende Definition allgemeiner komplexer Potenzen:

$$x^z := \exp(z \ln x) \;, \qquad x \in \mathbb{R}_+^* \;, \quad z \in \mathbb{C} \;.$$

Insbesondere gilt $e^z = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$. Die so definierten komplexen Potenzen haben folgende Eigenschaften:

i) Als Komposition stetiger Funktionen ist $x \mapsto x^z$ stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}_+^*$ (dabei ist z festgehalten), und $z \mapsto x^z$ ist stetig in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ (dabei ist x festgehalten).

ii) Für reelle Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto x^a$ streng monoton wachsend falls $a > 0$ und streng monoton fallend falls $a < 0$ (für $a = -b$ mit $b > 0$ gilt $x^{-b} = \exp(-b \ln x) = \frac{1}{\exp(b \ln x)} = \frac{1}{x^b}$). Folglich bildet die Funktion $x \mapsto x^a$ den Definitionsbereich $\mathbb{R}_+^*$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ ab.

iii) Für $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die Identitäten

$$(x^a)^b = x^{a\cdot b} \;, \qquad x^z \cdot y^z = (xy)^z \;.$$

1) $(x^a)^b := \exp(b \ln(x^a)) = \exp(b \ln(\exp(a \ln x))) = \exp(ba \ln x) = x^{ab}$, dabei ist $x^a \in \mathbb{R}_+^*$ entscheidend.
2) $x^z \cdot y^z = \exp(z \ln x) \cdot \exp(z \ln y) = \exp(z(\ln x + \ln x)) = \exp(z \ln(xy)) = (xy)^z$.

iv) Es gelten folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} x^a = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} x^a = \begin{cases} 0 & \text{für } a > 0 \\ \infty & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad \text{für } a > 0 \;, \qquad \lim_{x\to 0} x^a \ln x = 0 \quad \text{für } a > 0 \;.$$

Die erste Zeile folgt aus der Tatsache, daß $x \mapsto x^a$ streng monoton ist und $\mathbb{R}_+^*$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ abbildet. In der ersten Gleichung der zweiten Zeile verwende $\lim_{y\to\infty} \frac{y}{\exp(ay)} = 0$ für $a > 0$ und setze $y = \ln x$.

v) Als Konsequenz aus $\lim_{x\to 0} x^a = 0$ für $a > 0$ kann $x \mapsto x^a$ stetig nach $x = 0$ fortgesetzt werden, so daß $f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ eine stetige Funktion $f_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist (für $a > 0$).

Satz 15.2 *Für alle $s \in \mathbb{C}$ und $x \in]-1,1[$ gilt*

$$(1+x)^s = B_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n , \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n .$$

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $s \in \mathbb{C}^*$ schreiben wir

$$\frac{B_s(z)-1}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s,z) , \qquad f_n(s,z) := \frac{1}{s}\binom{s}{n} z^n = \frac{(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} z^n .$$

Es gilt $\left|\frac{f_{n+1}(s,z)}{f_n(s,z)}\right| = \frac{|s-n|}{n+1}|z|$, so daß für $|z| < 1$ und $|s| < M$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s,z)$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent ist. Sie definiert deshalb für festes s eine stetige Funktion in z, andererseits kann sie für festes z umgeordnet werden in eine Potenzreihe in s, die in jedem Punkt $s \in \mathbb{C}$ mit $|s| < M$, insbesondere in $s = 0$, stetig ist. Wegen $f_n(0,z) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ gilt somit

$$L(z) := \lim_{s\to 0} \frac{B_s(z)-1}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n , \qquad |z| < 1 .$$

Zusammen mit dem Additionstheorem $B_{s+t}(z) = B_s(z) \cdot B_t(z)$ folgt aus Beispiel 13.3, daß für festes z gilt $B_s(z) = \exp(sL(z))$. Für $s = 1$ ergibt sich $B_1(z) = (1+z) = \exp(L(z))$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Für $z = x \in]-1,1[$ wird durch Logarithmieren $\ln(1+x) = L(x)$ und dann $B_s(x) = \exp(sL(x)) = (1+x)^s$ erhalten. □

15.2 Trigonometrische Funktionen

Für die Exponentialfunktion gilt $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$, deshalb für rein imaginäre Zahlen $z = \mathrm{i}x$ mit $x \in \mathbb{R}$ zunächst $\overline{\exp(\mathrm{i}x)} = \exp(-\mathrm{i}x) = \frac{1}{\exp(\mathrm{i}x)}$, also

$$\left|e^{\mathrm{i}x}\right|^2 = \exp(\mathrm{i}x)\exp(-\mathrm{i}x) = 1 .$$

Damit liegt jeder Punkt e^{ix} auf dem Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$. Wir definieren

$$\cos x := \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}) , \qquad \sin x := \mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}) .$$

Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + \mathrm{i}\sin x , \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 .$$

Insbesondere sind $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ stetige Funktionen.

Satz 15.3 *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \ , \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \ ,$$

die Potenzreihendarstellungen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ , \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sowie der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis. Zum Beweis der Additionstheoreme zerlegt man $e^{\mathrm{i}(x+y)} = e^{\mathrm{i}x} \cdot e^{\mathrm{i}y}$ nach Real- und Imaginärteil. Die Potenzreihen ergeben sich aus der Exponentialfunktion unter Beachtung, daß i^n reell ist für n gerade und rein imaginär für n ungerade. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ folgt aus der Reihendarstellung des Sinus und Lemma 10.7. □

Wir kommen nun zur Definition der Zahl π:

Satz 15.4 *Der Cosinus hat im Intervall* $[0, 2]$ *genau eine Nullstelle, die mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnet wird. Es gilt* $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ *und* $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Beweis. Wir zeigen, daß $\cos : [0, 2] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend ist mit $\cos 0 = 1 > 0$ und $\cos 2 < 0$. Der Zwischenwertsatz liefert dann die Existenz einer Nullstelle, aus der Monotonie folgt ihre Eindeutigkeit. Insbesondere is $0 < \pi < 4$.

Die Reihen für cos und sin sind alternierend. Für $x \in]0, 2]$ bilden die Beträge der Summanden a_k in der Cosinusreihe bzw. der Sinusreihe eine streng monoton fallende Nullfolge ab $k = 1$ bzw. $k = 0$. Nach der Fehlerabschätzung im Leibniz-Kriterium (Satz 7.10) gilt damit für $x \in]0, 2]$

$$\underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{s_1} < \cos x < \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}_{s_3} \ , \qquad \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{s_1} < \sin x < \underbrace{x}_{s_0} \ ,$$

insbesondere ist $\cos 2 < -\frac{1}{3}$ und $\sin x > 0$ für $x \in]0, 2]$. Die Monotonie des Cosinus folgt aus folgenden Differenzengleichung

$$\cos x - \cos y = \cos(\tfrac{x+y}{2} + \tfrac{x-y}{2}) - \cos(\tfrac{x+y}{2} - \tfrac{x-y}{2}) = -2 \sin \tfrac{x-y}{2} \sin \tfrac{x+y}{2} \ .$$

Ist $0 \leq y < x \leq 2$, so ist die rechte Seite negativ. □

Somit gelten $e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} = \mathrm{i}$ und damit $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $e^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}} = -\mathrm{i}$ und $e^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ und damit

$$e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} \ , \qquad e^{i(x+\pi)} = -e^{\mathrm{i}x} \ , \qquad e^{i(x+\frac{3\pi}{2})} = -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} \ , \qquad e^{i(x+2\pi)} = e^{\mathrm{i}x} \ .$$

Zerlegung nach Real- und Imaginärteil liefert die folgenden Periodizitäten für Cosinus und Sinus:

$$\begin{array}{llll}\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x\ , & \cos(x+\pi) = -\cos x\ , & \cos(x+\frac{3\pi}{2}) = \sin x\ , & \cos(x+2\pi) = \cos x\ , \\ \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x\ , & \sin(x+\pi) = -\sin x\ , & \sin(x+\frac{3\pi}{2}) = -\cos x\ , & \sin(x+2\pi) = \sin x\ .\end{array}$$

Wegen $\cos x = \cos(-x)$ sind $\pm\frac{\pi}{2}$ die einzigen Nullstellen des Cosinus im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Aus $\cos(x+\pi) = -\cos x$ folgt dann, daß $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ die einzigen Nullstellen des Cosinus sind, und entsprechend sind $x_k = k\pi$ die einzigen Nullstellen des Sinus.

Satz 15.5 $e^z = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 2\mathrm{i}\pi k$ *für* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. ($\Leftarrow$) ist klar. Umgekehrt sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt $|e^z| = e^x|e^{\mathrm{i}y}| = e^x$, also $x = 0$ und dann $1 = e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$. Folglich ist $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$, der Sinus liefert zunächst $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, wegen $\cos(0 + \pi) = -\cos(0) = -1$ und der 2π-Periodizität sind aber nur $y = 2\pi k$ Lösungen. □

Folglich besitzt jede komplexe Zahl $z \neq 0$ die Darstellung $z = re^{\mathrm{i}\phi}$ mit $r = |z| \in \mathbb{R}^*_+$ und $\phi \in \mathbb{R}$, wobei ϕ nur bis auf Addition eines Vielfachen von 2π bestimmt ist.

15.3 Weitere trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Außerhalb der Nullstellen von cos bzw. sin werden Tangens und Cotangens definiert als

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\ , \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+\tfrac{1}{2})\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}\ , \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Diese sind stetig und π-periodisch, und als Hauptzweig wählt man das Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ für den Tangens und das Intervall $]0, \pi[$ für den Cotangens.

Satz 15.6

i) cos *ist im Intervall* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend und bildet somit* $[0, \pi]$ *bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Die damit existierende stetige Umkehrfunktion ist* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

ii) sin *ist im Intervall* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend und bildet somit* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab. Die damit existierende stetige Umkehrfunktion ist* $\arcsin : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

iii) tan *ist im Intervall* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *streng monoton wachsend und bildet* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *bijektiv auf* $\mathbb{R}$ *ab. Die damit existierende stetige Umkehrfunktion ist* $\arctan : \mathbb{R} \to\ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Beweis. i) cos ist nach dem Beweis von Satz 15.4 streng monoton fallend in $[0, \frac{\pi}{2}]$, und wegen $\cos(\pi - x) = -\cos(-x) = -\cos x$ ist cos auch in $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ streng monoton fallend.

ii) folgt aus i) mit $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

iii) Da sin in $[0, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wächst und cos dort streng monoton fällt und beide nichtnegativ sind, ist tan streng monoton wachsend in $[0, \frac{\pi}{2}[$. Wegen $\tan(-x) = -\tan x$ ist tan streng monoton wachsend in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Wegen $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist tan nach oben unbeschränkt in $[0, \frac{\pi}{2}[$, so daß tan das Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. □

Satz 15.7 *Es gilt* $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ *für* $x \in\,]-1, 1[$.

Beweis. Zunächst ist $\tan x = \frac{1}{i}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = \frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$. Auflösen nach e^{2ix} ergibt

$$e^{2ix} = \frac{1+i\tan x}{1-i\tan x} \qquad \overset{x=\arctan y}{\Rightarrow} \qquad e^{2i\arctan y} = \frac{1+iy}{1-iy}\,.$$

Im Beweis von Satz 15.2 haben wir $(1+z) = \exp(L(z))$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gezeigt, wobei $L(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$. Somit gilt $\dfrac{1+iy}{1-iy} = \exp(L(iy) - L(-iy))$. Für gerades $n = 2k$ ist $(iy)^{2k} = (-iy)^{2k}$, deshalb heben sich in $L(iy) - L(-iy)$ die geraden Potenzen von y auf und die ungeraden verdoppeln sich:

$$L(iy) - L(-iy) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(iy)^{2n+1} = 2i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}\,.$$

Aus $\exp(2i\arctan y) = \exp(L(iy) - L(-iy))$ und Satz 15.5 folgt

$$\arctan y + 2k\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $y = 0$ liefert $k = 0$. □

Interessant ist der Punkt $x = 1$, denn $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$, also $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$. Die Arcustangensreihe ist für $x = 1$ nicht mehr absolut konvergent, jedoch konvergent nach dem Leibniz-Kriterium. Da $\left|\tan x - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\right|$ stetig ist und durch den nachfolgenden Term $\frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$ abgeschätzt werden kann, konvergiert die Reihe für $x = 1$ gegen $\arctan 1$, also $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Über das Additionstheorem des Tangens kann $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ gezeigt werden, was eine sehr viel schneller konvergierende Reihendarstellung liefert.

Aus der Exponentialfunktion werden auch die folgenden hyperbolischen Funktionen Cosinus hyperbolicus, Sinus hyperbolicus, Tangens hyperbolicus, Cotangens hyperbolicus erhalten:

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \ , \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \ , \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} \ ,$$

Alle diese Funktionen sind stetig in $\mathbb{R}$, und $\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$ ist stetig in $\mathbb{R}^*$. Es gelten $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \ , \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \ , \end{aligned}$$

die Potenzreihendarstellungen

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \ , \qquad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sowie der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x} = 1$. Weiter gilt:

i) cosh wächst streng monoton auf $\mathbb{R}_+$ mit Bild $\cosh(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 1\}$, die Umkehrfunktion ist $\operatorname{arcosh} : \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 1\} \to \mathbb{R}_+$

ii) sinh wächst streng monoton auf $\mathbb{R}$ mit Bild $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, die Umkehrfunktion ist $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

iii) tanh wächst streng monoton auf $\mathbb{R}$ mit Bild $\tanh(\mathbb{R}) = \,]-1,1[$, die Umkehrfunktion ist $\operatorname{artanh} : \,]-1,1[\, \to \mathbb{R}$.

Diese Umkehrfunktionen lassen sich durch den Logarithmus darstellen:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \ , \qquad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \ ,$$
$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \ .$$

Teil IV
Differentialrechnung

16 Die Ableitung

Wir behandeln hier die Differentiation von Funktionen, die auf Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Die Funktionen dürfen aber komplexwertig sein, z.B. $f(x) = x^s$ für $s \in \mathbb{C}$ und $f(x) = e^{\mathrm{i}x}$, jeweils mit $x \in I \subset \mathbb{R}$.

Definition 16.1 Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* im Punkt $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$, $(Df)(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt differenzierbar in I, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierar ist.

Äquivalent dazu ist $f'(x) = (Df)(x_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$. Dabei ist h so zu wählen, daß $x_0 + h \in I$ gilt. Zur Vereinfachung der Schreibweise werde vereinbart, daß $\lim_{h \to 0}$ und $\lim_{x \to x_0}$ stets $h \neq 0$ und $x \neq x_0$ bedeuten. Für reellwertige Funktionen ist $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ die Steigung der Sekante des Graphen von f durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$. Im Grenzübergang $x \to x_0$ geht die Sekante in die Tangente an den Graphen im Punkt x_0 über.

Beispiel 16.2 Es sei $a < 0$ und $b > 0$. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0 \in [a, b]$. Denn $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$
Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ und $\epsilon = \frac{1}{2}$ gibt es für alle $\delta > 0$ ein $x \in [a, b]$ mit $|x - 0| < \delta$ und $|\frac{|x|}{x} - c| \geq \frac{1}{2}$. Dagegen wäre $f(x) = |x|$ differenzierbar in $[a, 0]$ und in $[0, b]$ mit Ableitung $f'(x) = -1$ bzw. $f'(x) = 1$.

Satz 16.3 i) $f(x) = x^n$ *für* $x \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ $\quad\Rightarrow\quad f'(x) = nx^{n-1}$
(und $f'(x) = 0$ *für* $n = 0$*)*

ii) $f(x) = e^{cx}$ *für* $x \in \mathbb{R}$ *und* $c \in \mathbb{C}$ $\quad\Rightarrow\quad f'(x) = ce^{cx}$
(insbesondere $f(x) = a^x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = a^x \ln a$*)*

iii) $f(x) = \ln x$ *für* $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

Beweis. i) $\frac{\xi^n - x^n}{\xi - x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xi^{n-1-k}$. Die rechte Seite konvergiert für $\xi \to x$ gegen nx^{n-1}.

ii) $\frac{e^{c(x+h)} - e^{cx}}{h} = e^{cx} \frac{e^{ch}-1}{h}$. Nach Beispiel 13.3 ist $\lim_{h \to 0} \frac{e^{ch}-1}{h} = c$.

iii) $\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$. Nach Satz 15.1 ist $\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$. $\square$

Satz 16.4 (Lineare Approximierbarkeit) *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ ist genau dann differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gibt, so daß für die Funktion $\phi : I \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$ gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)}{x-x_0} = 0$. In diesem Fall ist $f'(x_0) = c$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = c$. Für $x \neq x_0$ gilt $\frac{\phi(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$. Der Grenzwert der rechten Seite für $x \to x_0$ ist 0.

($\Leftarrow$) Es gelte $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$ mit $\lim_{x\to x_0} \frac{\phi(x)}{x-x_0} = 0$. Dann ist $0 = \lim_{x\to x_0} \big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - c\big)$, d.h. der Grenzwert $c = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. □

Für reellwertige Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ ist der Graph der Funktion $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die Tangente an den Graphen von f im Punkt x_0.

Satz 16.5 *Ist $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, dann ist f in x_0 auch stetig.*

Beweis. Nach Satz 16.4 gilt insbesondere $\lim_{x\to x_0} \phi(x) = 0$, also $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)\big) = f(x_0)$. □

Satz 16.6 *Die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ seien in $x \in I$ differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und für $g(x) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x, und es gilt*

$$\begin{aligned}
(f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
(f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) && \textit{(Produktregel bzw. Leibniz-Regel)} \\
(\tfrac{f}{g})'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} && \textit{(Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

Beweis. Man schreibt die Differenzenquotienten wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{(f + g)(x{+}h) - (f + g)(x)}{h} &= \frac{f(x{+}h) - f(x)}{h} + \frac{g(x{+}h) - g(x)}{h}\,, \\
\frac{(f \cdot g)(x + h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \frac{f(x{+}h) - f(x)}{h} g(x{+}h) + f(x)\frac{g(x{+}h) - g(x)}{h}\,, \\
\frac{(\frac{f}{g})(x{+}h) - (\frac{f}{g})(x)}{h} &= \frac{1}{g(x)g(x{+}h)}\Big(\frac{f(x{+}h) - f(x)}{h} g(x) - f(x)\frac{g(x{+}h) - g(x)}{h}\Big).
\end{aligned}$$

Da g nach Satz 16.5 in x stetig ist, ist in der letzten Gleichung nach Satz 12.8.ii) $g(x + h) \neq 0$ für $\delta > h > 0$. Nach Satz 13.4 haben die Grenzwerte für $h \to 0$ die behaupteten Eigenschaften. □

Beispiel 16.7 i) Polynome $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind differenzierbar in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, und es gilt $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

ii) Rationale Funktionen $f(x) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k}{\sum_{l=0}^m b_l x^l}$ sind differenzierbar außerhalb der Nullstellen des Nennerpolynoms, und es gilt $f'(x) = \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m (k-l) a_k b_l x^{k+l-1}}{\left(\sum_{l=0}^m b_l x^l\right)^2}$. Insbesondere gilt für die in der Partialbruchzerlegung (Satz 11.4) entstehenden elementaren Funktionen $g(x) = \frac{1}{(x-a)^k}$, daß $g'(x) = \frac{-k}{(x-a)^{k+1}}$.

iii) cos, sin sind als Summen von Exponentialfunktionen differenzierbar in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$, und es gilt $\cos'(x) = -\sin(x)$ und $\sin'(x) = \cos(x)$. (Verwende $\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})' = \frac{1}{2}(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x})$ und analog für sin).

iv) tan und cot sind als Quotienten der differenzierbaren Funktionen sin und cos differenzierbar in jedem Punkt des Definitionsbereiches, und es gilt $\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ und $\cot'(x) = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

Satz 16.8 (Kettenregel) *Die Funktion $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$, und die Funktion $g : J \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar in $f(x_0) \in J$. Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar in x_0, und es gilt $(g \circ f')(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.*

Beweis. Sei $y_0 := f(x_0)$. Durch $\gamma(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ werde eine Funktion $\gamma : J \to \mathbb{C}$ definiert. Da g in y_0 differenzierbar ist, ist γ in y_0 stetig, und es gilt $g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\gamma(y)$ für alle $y \in J$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\gamma(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \gamma(f(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \gamma(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0) \cdot f'(x_0)\ .\end{aligned}$$

□

Beispiel 16.9 i) Für $f(x) = x^z$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}_+^*$ gilt $f'(x) = zx^{z-1}$: Setze $g(y) = e^{zy}$ und $\tilde{g}(x) = \ln x$, dann ist $f(x) = (g \circ \tilde{g})(x) = e^{z \ln x}$ und $f'(x) = ze^{z \ln x} \cdot \frac{1}{x}$.

ii) Für $f(x) = \sqrt{1+x}$ mit $x > -1$ gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$: Setze $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$ mit $g'(y) = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1}$ und $\tilde{g}(x) = 1 + x$.

Satz 16.10 (Differentiation der Umkehrfunktion) *Es sei $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar in $y_0 \in I$ mit $f'(y_0) \neq 0$, dann ist g differenzierbar in $x_0 := f(y_0)$, und es gilt $g'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)} = \dfrac{1}{f'(g(x_0))}$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 16.8 ist $\phi(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ f'(y_0) & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ eine in y_0 stetige Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ mit $f(y) - f(y_0) = (y - y_0)\phi(y)$ für alle $y \in I$ und $f'(y_0) = \phi(y_0)$. Wegen der strengen Monotonie von f und $\phi(y_0) \neq 0$ ist $\phi(y) \neq 0$ für alle $y \in I$. Dann folgt mit $y := g(x)$ und $x = f(y)$

$$\frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\phi(g(x))} \ .$$

Für $x \to x_0$ folgt aus der Stetigkeit von g in x_0 und der Stetigkeit von ϕ in $y_0 = g(x_0)$ die Behauptung. □

Beispiel 16.11

i) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Sei $y := \arctan x$, so gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

ii) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in]-1,1[$. Mit $y = \arcsin x$ und $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Satz 16.12 *Es seien $f_n : I \to \mathbb{C}$ differenzierbare und Lipschitz-stetige Funktionen mit $0 \leq \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|} \leq L_n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in I$. Wenn*

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *konvergent ist in jedem Punkt $x \in I$ und*

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_0)$ *und* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} L_n$ *konvergent sind,*

dann ist die Funktion $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.

Insbesondere ist jede Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ in jedem Punkt $x \in]-R, R[$ differenzierbar, und es gilt $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß gleichzeitig gilt $\sum_{n=N+1}^{\infty} L_n < \frac{\epsilon}{3}$ und $\sum_{n=N+1}^{\infty} f'(x_0) < \frac{\epsilon}{3}$. Dann gilt für beliebige $x \in I \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_0)\Big| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} \Big|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0)\Big| + \sum_{n=N+1}^{\infty} L_n + \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} f'(x_0)\Big| \ . \end{aligned}$$

Wegen der Differenzierbarkeit der f_n mit $0 \leq n \leq N$ gibt es ein gemeinsames $\delta > 0$, so daß $\sum_{n=0}^{N} \Big|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - f_n'(x_0)\Big| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Somit ist $\Big|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_0)\Big| < \epsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Für Potenzreihen ist $f_n = a_n x^n$, und für $x, y \in \,]-r, r[$ mit $0 < r < R$ gilt $\left|\frac{a_n x^n - a_n y^n}{x-y}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_n x^k y^{n-1-k}\right| \leq n|a_n| r^{n-1} =: L_n$. Nach dem Wurzelkriterium und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius R, so daß die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_0^{n-1}$ mit $|x_0| < r$ und $\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$ konvergieren. Dann folgt die Behauptung aus dem allgemeinen Teil mit $I = \,]-r, r[$, denn jeder Punkt $-R < x_0 < R$ liegt in I für $r = \frac{|x_0|+R}{2} < R$. □

Beispiel 16.13 Die Funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^s}$ und $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^s}$ sind für alle $s > 2$ differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^{s-1}}$ und $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{s-1}}$.

Zum Beweis der Lipschitz-Bedingung verwende man $\left|\frac{\cos(nx)-\cos(ny)}{x-y}\right| = \frac{2}{|x-y|}\left|\sin\frac{n(x+y)}{2}\right|\left|\sin\frac{n(x-y)}{2}\right| \leq n \sup_{r\in\mathbb{R}_+^*}\left|\frac{\sin r}{r}\right| \leq n \sup_{r\in]0,\frac{\pi}{2}]}\left|\frac{\sin r}{r}\right| = 1$. Der letzte Schritt folgt aus $\lim_{r\to 0}\frac{\sin r}{r} = 1$ und $1 > \frac{\sin r}{r} > 1 - \frac{r^2}{6}$ für $r \in \,]0, \frac{\pi}{2}]$ nach dem Leibniz-Kriterium. Analog für g.

17 Lokale Extrema, Mittelwertsatz

Extrama von Funktionen lassen sich zunächst für beliebige Definitionsbereiche definieren; für Intervalle liefert dann die Differenzierbarkeit ein wichtiges Kriterium.

Definition 17.1 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$

i) ein *globales Maximum* bzw. *globales Minimum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$,

ii) ein *lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in U \cap D$.

Ein lokales/globales Extremum ist ein lokales/globales Minimum oder Maximum. Gilt in i) und ii) das Gleichheitszeichen nur für den Punkt $x = x_0$, so hat f in x_0 ein *strenges* Extremum.

Satz 17.2 *Eine Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ besitze in $x_0 \in \,]a, b[$ ein lokales Extremum und sei differenzierbar in x_0. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. (für lokales Maximum) Es gibt eine Umgebung U von x mit $f(x) - f(x_0) \leq 0$ für alle $x \in U$, und U enthält Punkte $x > x_0$ und Punkte $y < x_0$. Somit gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in U \text{ mit } x > x_0$$
$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq 0 \qquad \text{für alle } y \in U \text{ mit } y < x_0$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, folgt aus beiden Ungleichungen $f'(x_0) = 0$. $\square$

Bemerkungen:

i) Stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nehmen ihr globales Maximum und Minimum an. Als Kandidaten dieser Extremalpunkte kommen die Randpunkte a, b und, falls f differenzierbar ist, die Lösungen von $f'(x) = 0$ in Frage. Für ein globales Extremum an Randpunkten a oder b muß $f'(a) = 0$ bzw. $f'(b) = 0$ nicht gelten.

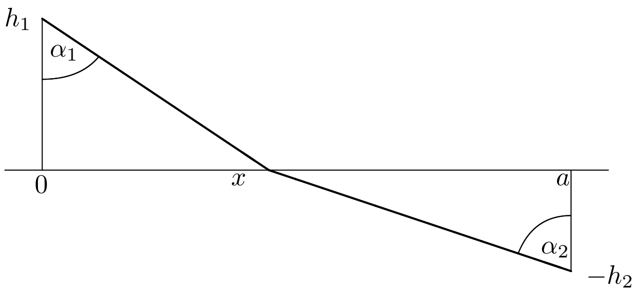
ii) $f'(x) = 0$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Extremums im Punkt x. Z.B. gilt für $f(x) = x^3$ zwar $f'(0) = 0$, aber f besitzt als streng monoton wachsende Funktion kein lokales Extremum.

Beispiel 17.3 (Fermatsches Prinzip und Brechungsgesetz) Gesucht ist der schnellste Weg zwischen einem Punkt $(0, h_1)$ und einem Punkt $(a, -h_2)$, wenn der Betrag der Geschwindigkeit v_1 ist in $M_1 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ und v_2 in $M_2 \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$, und die Bewegung in M_1 und M_2 geradlinig verläuft.

Die Zeit für einen Weg durch $(x, 0)$ ist $t(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}$. Diese Funktion ist in $]0, a[$ differenzierbar. Liegt ein lokales Extremum in $x \in]0, a[$ vor, so gilt dort

$$0 = t'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{a - x}{\sqrt{h_1^2 + (a - x)^2}} ,$$

also die geometrische Bedingung $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$



Satz 17.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Die Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig auf dem kompakten Intervall* $[a, b]$ *und differenzierbar auf dem offenen Intervall* $]a, b[$. *Dann gibt es ein* $\xi \in]a, b[$ *mit* $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

Ein wichtiger Spezialfall ist der **Satz von Rolle***: Gilt zusätzlich* $f(a) = f(b)$, *so gibt es ein* $\xi \in]a, b[$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

Beweis. i) für den Satz von Rolle. Ist f konstant auf $[a, b]$, so ist $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in]a, b[$. Ansonsten nimmt f als stetige Funktion nach dem Satz vom

Maximum/Minimum ein Maximum und ein Minimum an, und zumindest eines ist von $f(a) = f(b)$ verschieden. Damit wird dieses Extremum in einem Punkt $\xi \in]a, b[$ angenommen, und wegen der Differenzierbarkeit von f in ξ gilt $f'(\xi) = 0$.

ii) Man betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Diese ist wie f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$, außerdem gilt $F(a) = F(b) = f(a)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es $\xi \in]a, b[$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Satz 17.5 (Schrankensatz) *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$ mit beschränkter Ableitung $|f'(x)| \le L$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten L, d.h. $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$.*

Für reellwertige differenzierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt unter sonst gleichen Voraussetzungen: Ist $m \le f'(x) \le M$ für alle $x \in]a, b[$, so gilt $m(x_2 - x_1) \le f(x_2) - f(x_1) \le M(x_2 - x_1)$ für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 \le x_2$.

Beweis. ii) Die Aussage für reelle Funktionen ist eine Umformulierung des Mittelwertsatzes, insbesondere werden für m, M nur innere Punkte $\xi \in]a, b[$ benötigt.

i) Sei $f(x) \ne f(y)$, insbesondere $x \ne y$, sonst ist nichts zu zeigen. Setze $c := \frac{|f(x)-f(y)|}{f(x)-f(y)} \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $\phi := \mathrm{Re}(cf)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu $x, y \in [a, b]$ ein $\xi \in]x, y[$ mit $\phi(x) - \phi(y) = (x - y)\phi'(\xi)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= cf(x) - cf(y) = \phi(x) - \phi(y) = (x - y)\phi'(\xi) \\ &\le |x - y| \sup_{\xi \in]x,y[} |\phi'(x)| \le L|x - y| \end{aligned}$$

wegen $|\mathrm{Re}(cf')(x)| \le |f'(x)| \le L$. □

Satz 17.6 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$ mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.*

Insbesondere gilt: Zwei differenzierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in]a, b[$ unterscheiden sich nur um eine Konstante, $f - g = const.$

Beweis. Nach dem Schrankensatz ist $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in [a, b]$. Der zweite Teil folgt aus dem ersten für die Funktion $f - g$. □

Als Anwendung geben wir eine weitere Charakterisierung der Exponentialfunktion als eindeutige Lösung einer *Differentialgleichung* zu gegebener *Anfangsbedingung*:

Satz 17.7 *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion, und es gelte $f'(x) = cf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $c \in \mathbb{C}$. Ist $f(0) =: A \in \mathbb{C}$, so gilt $f(x) = A\,e^{cx}$.*

Beweis. Für $F(x) := f(x)e^{-cx}$ gilt nach Produktregel $F'(x) = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist F nach Satz 17.6 eine konstante Funktion, also $F(x) = F(0) = f(0) = A$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt $f(x) = A\,e^{cx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Satz 17.8 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$, und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in\,]a, b[$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$, und es gibt ein $\xi \in\,]a, b[$ mit $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.*

Beweis. Wäre $g(b) = g(a)$, so gäbe es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in\,]a, b[$ mit $g'(\xi) = 0$, Widerspruch. Wir können deshalb den Satz von Rolle auf die Funktion $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$ anwenden. Es gilt $F(a) = F(b) = f(a)$, also gibt es ein $\xi \in\,]a, b[$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)$. $\square$

Die folgende Rechenregel erlaubt in vielen Fällen eine einfache Berechnung von Grenzwerten:

Satz 17.9 (Regel von de l'Hospital) *Die Funktionen $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ seien differenzierbar, und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in\,]a, b[$. In beiden Fällen*

i) $\lim_{x\searrow a} f(x) = 0$ *und* $\lim_{x\searrow a} g(x) = 0$

ii) *sowie* $\lim_{x\searrow a} f(x) = \infty$ *und* $\lim_{x\searrow a} g(x) = \infty$

gilt: Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\searrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt $\lim\limits_{x\searrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\searrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Analog für $x \nearrow a$ sowie $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

Beweis. i) Definieren wir $f(a) := 0$ und $g(a) := 0$, so sind die Funktionen f, g stetig in a. Damit sind zu jedem $x \in\,]a, b[$ die Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes für $f, g : [a, x] \to \mathbb{R}$ erfüllt, und es existiert ein $\xi \in\,]a, x[$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Nach Voraussetzung existiert der Limes $x \searrow a$ und hat die behauptete Eigenschaft.

ii) Nach Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes $A := \lim_{x\searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in\,]a, a + \delta[$ gilt $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \epsilon$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt dann auch $\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - A\right| < \epsilon$ für alle $x, y \in\,]a, a + \delta[$ mit $x \neq y$. Wir betrachten

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \left(\frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} - 1 \right) .$$

Wir halten y fest und lassen x gegen a gehen. Wegen $\lim_{x\searrow a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\searrow a} g(x) = \infty$ gibt es ein δ' mit $0 < \delta' < y - a < \delta$, so daß $\Big|\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}} - 1\Big| < \frac{\epsilon}{|A|+\epsilon}$ für alle $x \in \,]a, a+\delta'[$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - A\Big| &\leq \Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\Big| + \Big|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - A\Big| \\ &< \Big|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\Big|\left|\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}} - 1\right| + \epsilon < 2\epsilon\end{aligned}$$

für alle $x \in \,]a, a+\delta'[$. $\square$

Beispiel 17.10 Für $\alpha > 0$ untersuchen wir Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x$. Die Regel von de l'Hospital ist anwendbar für die Funktionen $f(x) = -\ln x$ und $g(x) = x^{-\alpha}$ mit $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\searrow 0} g(x) = \infty$, und es gilt

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^\alpha}{\alpha} = 0 \,.$$

Somit erhalten wir $\lim\limits_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ für alle $\alpha > 0$.

18 Monotonie, höhere Ableitungen, Konvexität

Satz 18.1 (Monotoniekriterium) *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}&f' > 0 \textit{ in }]a,b[\Rightarrow f \textit{ wächst in }]a,b[\textit{ streng monoton,}\\ &f' < 0 \textit{ in }]a,b[\Rightarrow f \textit{ fällt in }]a,b[\textit{ streng monoton,}\\ &f' \geq 0 \textit{ in }]a,b[\Leftrightarrow f \textit{ wächst in }]a,b[\textit{ monoton,}\\ &f' \leq 0 \textit{ in }]a,b[\Leftrightarrow f \textit{ fällt in }]a,b[\textit{ monoton.}\end{aligned}$$

Beweis. ($\Rightarrow$) folgt jeweils aus dem Mittelwertsatz bzw. Schrankensatz. ($\Leftarrow$) folgt aus Definition des Grenzwertes. $\square$

Das Beispiel der streng monoton wachsenden Funktion $f(x) = x^3$ mit $f'(0) = 0$ zeigt, daß in den ersten beiden Implikationen in Satz 18.1 die Umkehrungen ($\Leftarrow$) nicht gelten.

Die Ableitung $f' : I \to \mathbb{C}$ einer auf $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ kann erneut auf Differenzierbarkeit in $x_0 \in I$ untersucht werden, und gegebenenfalls heißt die Ableitung von f' in x_0 die *zweite Ableitung* von f in x_0. Man schreibt $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ oder auch $(DDf)(x_0)$ oder $\frac{d^2f}{dx}(x_0)$. Die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f wird dann rekursiv definiert als $f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0)$, falls $f^{(n-1)}$ in x_0 differenzierbar ist. Dabei ist $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$ und $f^{(1)}(x_0) := f'(x_0)$. Ist die n-te Ableitung $f^{(n)}$ stetig, so heißt f n-mal stetig differenzierbar.

Existiert $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt f *beliebig oft differenzierbar* (Stetigkeit ist automatisch). Nach Satz 16.12 ist jede Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ beliebig oft differenzierbar im Inneren ihres Konvergenzkreises, und dort gilt $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$. Die Menge der beliebig oft differenzierbare Funktionen ist "größer" als die Menge der durch Potenzreihen darstellbaren Funktionen. Eine nützliche beliebig oft auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion ist die Einschaltfunktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Satz 18.2 *Eine in $]a, b[$ differenzierbare Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in]a, b[$ zweimal differenzierbar, und es gelte $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) \neq 0$. Dann besitzt f in x_0 ein strenges lokales Extremum, und zwar ein strenges lokales Minimum für $f''(x_0) > 0$ bzw. ein strenges lokales Maximum für $f''(x_0) < 0$.*

Beweis. (für $f''(x_0) > 0$). Wegen $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß unter Verwendung von $f'(x_0) = 0$ gilt $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ für alle $x \in]a, b[$ mit $0 < |x - x_0| < \epsilon$. Nach Satz 18.1 ist f' in $]x_0 - \epsilon, x_0[$ streng monoton fallend und in $]x_0, x_0 + \epsilon[$ streng monoton wachsend, besitzt also in x_0 ein strenges lokales Minimum. □

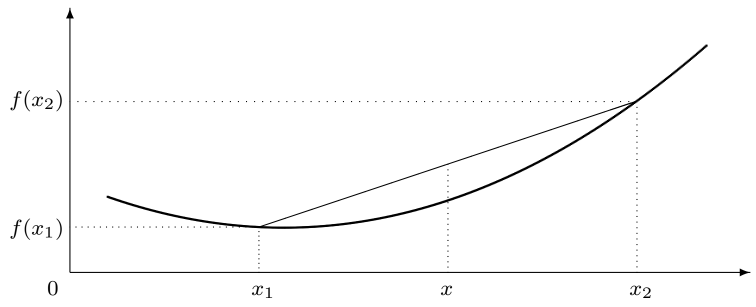
Definition 18.3 Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, wenn für alle $x_1 < x_2 \in I$ und alle $\lambda \in]0, 1[$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \ .$$

Gilt sogar die Relation '$<$', so heißt f *streng konvex*. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *(streng) konkav*, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Setzen wir $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, dann ist $x_1 < x < x_2$ und $\lambda = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$. Somit ist $x \mapsto \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$ die Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$. Folglich bedeutet Konvexität, daß $(x, f(x))$ unterhalb der Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ liegt, und zwar für beliebige $x_1, x_2 \in$

I mit $x_1 < x < x_2$.



Die Definition von Konvexität erfordert keine Differenzierbarkeit: Z.B: ist $f(x) = |x|$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ konvex. Für differenzierbare Funktionen haben wir

Satz 18.4 (Konvexitätskriterium) *Eine in $[a, b]$ stetige und in $]a, b[$ differenzierbare Funktion f ist genau dann konvex in $[a, b]$, wenn f' in $]a, b[$ monoton wächst.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f konvex und $x_1 < x_2$ Punkte aus $]a, b[$. Dann gilt $f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x - x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x - x_1)$ für alle $x \in]x_1, x_2[$, also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \; .$$

Für $x \searrow x_1$ einerseits und $x \nearrow x_2$ andererseits folgt aus der Differenzierbarkeit in x_1, x_2 die Relation $f'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$. Da $x_1 < x_2$ beliebig sind, wächst f' monoton.

($\Leftarrow$) Sei f' monoton wachsend und $x_1 < x < x_2$ Punkte aus $[a, b]$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es Punkte $\xi_1 \in]x_1, x[$ und $\xi_2 \in]x, x_2[$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \qquad \text{und} \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2) \; .$$

Es ist $\xi_1 < \xi_2$ und damit $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, also $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ für alle $x \in]x_1, x_2[$. Dann ist $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$ für $\lambda \in]0, 1[$, also $\lambda(f(x) - f(x_1)) \leq (1 - \lambda)(f(x_2) - f(x))$ und dann $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. □

Satz 18.5 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar in $]a, b[$. Dann gilt:*

i) $f'' \geq 0$ *in* $]a, b[$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ f *ist konvex in* $[a, b]$.

ii) $f'' > 0$ *in* $]a, b[$ $\quad\Rightarrow\quad$ f *ist streng konvex in* $[a, b]$.

Beweis. i) ist Satz 18.1 für f' zusammen mit Satz 18.4.

ii) f ist zumindest konvex. Wäre f nicht streng konvex, so gibt es $x_1 < x < x_2 \in [a,b]$ mit $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann Punkte $\xi_1 \in]x_1, x[$ und $\xi_2 \in]x, x_2[$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2) ,$$

im Widerspruch zur strengen Monotonie von f' nach Satz 18.1 für f'. □

Beispiel 18.6 Die Funktionen $f(x) = x^{2n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind streng konvex auf $\mathbb{R}$ wegen $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} > 0$. Ebenso ist $f(x) = e^x$ streng konvex auf $\mathbb{R}$ wegen $f''(x) = e^x > 0$. Schließlich ist $f(x) = \ln x$ streng konkav auf $\mathbb{R}^*_+$, da $(-\ln x)'' = \frac{1}{x^2} > 0$.

Definition 18.7 Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in]a,b[$ einen *Wendepunkt*, wenn es Intervalle $]\alpha, x_0[,]x_0, \beta[\subset [a,b]$ gibt, so daß eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

i) f ist in $]\alpha, x_0[$ konvex und in $]x_0, \beta[$ konkav, oder

ii) f ist in $]\alpha, x_0[$ konkav und in $]x_0, \beta[$ konvex.

Ist f zweimal differenzierbar in $]a,b[$, so sind die Bedingungen i) und ii) äquivalent zu

i') $f'' \geq 0$ in $]\alpha, x_0[$ und $f'' \leq 0$ in $]x_0, \beta[$, oder

ii') $f'' \leq 0$ in $]\alpha, x_0[$ und $f'' \geq 0$ in $]x_0, \beta[$.

In diesem Fall ist $f''(x_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für einen Wendepunkt in x_0.

Beispiel 18.8 Die Funktionen $f(x) = x^{2n+1}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ haben in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt.

Eine wichtige Anwendung der Konvexität ist das Newtonsche Iterationsverfahren zur numerischen Berechnung von Nullstellen.

Satz 18.9 (Newtonsches Iterationsverfahren) *Eine stetige und konvexe Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sei zweimal stetig differenzierbar in $]a,b[$. Dann gilt:*

i) *Es gibt genau ein $\xi \in]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$.*

ii) *Ist $x_0 \in]a,b[$ ein beliebiger Punkt mit $f(x_0) \geq 0$, dann ist die durch*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert und konvergiert monoton fallend gegen ξ.

Bemerkung: Analoge Aussagen gelten für konkave Funktionen und/oder für $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$. Man kann zeigen, daß das Verfahren quadratisch konvergiert, d.h. x_n approximiert ξ für große n auf $2n$ Dezimalstellen genau.

Beweis. i) Nach dem Zwischenwertsatz gibt es zumindest eine Nullstelle ξ von f in $]a, b[$. Außerdem gibt es nach dem Satz vom Minimum in $q \in [a, b]$ ein globales Minimum mit $f(q) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Damit ist $f(q) < 0$. Ist $q \neq a$, so hat f in q ein lokales Minimum, d.h. es gilt $f'(q) = 0$. Nach Satz 18.4 und Satz 18.5 ist f' monoton wachsend in $]a, b[$, also gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, q]$. Somit liegen alle Nullstellen von f in $]q, b[$.

Angenommen, es gäbe zwei Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $t \in]q, \xi_1[$ mit $f'(t) = \frac{f(\xi_1)-f(q)}{\xi_1-q} = \frac{-f(q)}{\xi_1-q} > 0$. Daraus folgt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [t, b[$, insbesondere ist f in $[\xi_1, b]$ streng monoton wachsend und kann keine zweite Nullstelle besitzen.

ii) Für den Anfangspunkt der Folge gilt $x_0 \geq \xi$. Wir zeigen durch vollständige Induktion $f(x_n) \geq 0$ und $\xi \leq x_n \leq x_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

a) Aus $x_n \geq \xi$ folgt $f'(x_n) \geq f'(\xi) > 0$, also $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq 0$ und somit $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n$.

b) Die Funktion $\phi_n(x) := f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)$ beschreibt die Differenz von $f(x)$ zur ihrer Tangenten in x_n. Es gilt $\phi_n'(x) = f'(x) - f'(x_n)$, also $\phi_n'(x) \leq 0$ für $x \leq x_n$. Aus $\phi_n(x_n) = 0$ folgt dann $\phi_n(x) \geq 0$ für $x \leq x_n$, insbesondere $0 \leq \phi_n(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1})$. Damit ist $x_{n+1} \geq \xi$, so daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende und durch ξ nach unten beschränkte Folge ist. Sei $x^* := \lim_{n\to\infty} x_n$ ihr Grenzwert, dann folgt aus der Stetigkeit von f und f' in $]a, b[$ die Gleichung $x^* = x^* - \dfrac{f(x^*)}{f'(x^*)}$, also $f(x^*) = 0$ und damit $x^* = \xi$. □

Beispiel 18.10 Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}_+^*$ betrachten wir die durch $f(x) = x^k - a$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Diese ist konvex auf $\mathbb{R}_+$ mit $f(0) = -a < 0$ und $f(1 + a) > 0$. Das Newtonsche Iterationsverfahren zur Berechnung der Nullstellen ist damit anwendbar und liefert die Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right),$$

die für einen beliebigen Startwert x_0 mit $x_0^k \geq a$ monoton fallend gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert. (Wählt man $0 < x_0^k < a$, dann ist $x_1^k > a$, und das Verfahren konvergiert ebenfalls. Siehe Satz 5.13)

Teil V
Integralrechnung

Es gibt verschiedene Integralbegriffe, die sich unterscheiden hinsichtlich der Menge der integrierbaren Funktionen. Wir behandeln hier das Riemann-Integral. Eine andere Möglichkeit wäre das Regelintegral. Dieses ist einfacher einzuführen, wenn bereits der Begriff des normierten Vektorraums zur Verfügung steht. Da wir das erst im Anschluß an die lineare Algebra einführen, entscheiden wir uns hier für das Riemann-Integral.

19 Das Riemannsche Integral

Definition 19.1 Eine Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ von $[a, b]$ derart gibt, daß ϕ auf jedem offenen Teilintervall $]x_k, x_{k+1}[$ konstant ist. Die Werte von ϕ an den Punkten $x_0, \ldots, x_n$ dürfen dabei beliebig (aber beschränkt) sein.

Die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ werde mit $\mathcal{T}[a, b]$ bezeichnet. Es gilt:

i) Die Nullfunktion $\phi(x) = 0$ liegt in $\mathcal{T}[a, b]$.

ii) Aus $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ folgt $\phi + \psi \in \mathcal{T}[a, b]$.

iii) Aus $\phi \in \mathcal{T}[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt $\lambda\phi \in \mathcal{T}[a, b]$.

i) und iii) sind klar, zum Beweis von ii) betrachte man die Unterteilung $\{x_0, \ldots, x_n\}$ zu ϕ und $\{x'_0, \ldots, x'_m\}$ zu ψ und bilde die Unterteilung $\{t_0, \ldots, t_k\} := \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$ mit $k \leq m + n - 1$ und $t_j < t_{j+1}$. Dann sind ϕ, ψ und damit $\phi + \psi$ Treppenfunktionen bezüglich der gemeinsamen Unterteilung $\{t_0, \ldots, t_k\}$. In der Sprache der lineren Algebra bedeuten i)–iii), daß $\mathcal{T}[a, b]$ ein (unendlich-dimensionaler) Vektorraum ist.

Definition 19.2 (Integral für Treppenfunktionen) Sei $\phi \in \mathcal{T}[a, b]$ definiert bezüglich der Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, und auf den Teilintervallen $]x_{k-1}, x_k[$ habe ϕ den Wert c_k. Dann setzt man

$$\int_a^b dx\ \phi(x) := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}) .$$

Für reellwertige positive Treppenfunktionen ist das Integral $\displaystyle\int_a^b dx\ \phi(x)$ gleich dem Inhalt der Fläche, die vom Graphen von ϕ und den Geraden $x = a$, $x = b$ und $y = 0$ begrenzt wird. Streng genommen muß noch gezeigt werden, daß das so definierte Intgral *unabhängig von der gewählen Unterteilung* der Treppenfunktion ist. Das geschieht durch Zurückführen zweier Unterteilungen auf eine gemeinsame noch feinere Unterteilung und Berücksichtigung der Tatsache, daß die endlich vielen Randpunkte der Teilintervalle zum Integral nicht beitragen. (Für positive Funktionen haben die Kanten $\{x_k\} \times [0, \phi(x_k)]$ die Fläche 0, was sich dann auf allgemeine Funktionen überträgt.)

Für reellwertige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ erklären wir $f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Satz 19.3 *Für Treppenfunktionen $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:*

i) $\displaystyle\int_a^b dx\ (\alpha\phi + \beta\psi)(x) = \alpha \int_a^b dx\ \phi(x) + \beta \int_a^b dx\ \psi(x)$ *(Linearität)*

ii) $\displaystyle\Big|\int_a^b dx\ \phi(x)\Big| \leq (b - a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} |\phi(x)|$ *(Beschränktheit)*

iii) *Sind ϕ, ψ reellwertig mit $\phi \leq \psi$, so gilt*
$\displaystyle\int_a^b dx\ \phi(x) \leq \int_a^b dx\ \psi(x)$ *(Monotonie)*

(Man sagt: Das Integral ist ein lineares, beschränktes und monotones Funktional auf $\mathcal{T}[a, b]$.)

Beweis. Nach Wahl gemeinsamer Unterteilungen sind das die üblichen Eigenschaften endlicher Summen. □

Definition 19.4 (Ober- und Unterintegral) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte reellwertige Funktion. Dann heißt

$$\int_a^{b\,*} dx\ f(x) := \inf\Big\{ \int_a^b dx\ \phi(x)\ :\ \phi \in \mathcal{T}[a, b]\ ,\ \phi \geq f \Big\}$$

das *Oberintegral* von f und

$$\int_{a\,*}^b dx\ f(x) := \sup\Big\{ \int_a^b dx\ \phi(x)\ :\ \phi \in \mathcal{T}[a, b]\ ,\ \phi \leq f \Big\}$$

das *Unterintegral* von f. (Dabei sind die Treppenfunktionen $\phi \in \mathcal{T}[a, b]$ reellwertig.)

Es gilt stets $\displaystyle\int_a^{b\,*} dx\ f(x) \geq \int_{a\,*}^b dx\ f(x)$ wegen der Monotonie des Integrals nach Satz 19.3.iii).

Für reellwertige Treppenfunktionen $\psi \in \mathcal{T}[a, b]$ gilt $\displaystyle\int_a^{b\,*} dx\ \psi(x) = \int_{a\,*}^b dx\ \psi(x)$, denn die Treppenfunktion selbst realisiert das Infimum und Supremum.

Definition 19.5 Eine beschränkte reellwertige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn ihre Ober- und Unterintegrale übereinstimmen; in diesem Fall setzt man

$$\int_a^b dx\ f(x) := \int_a^{*b} dx\ f(x) = \int_{a*}^{b} dx\ f(x)\ .$$

Eine beschränkte komplexwertige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Riemann-integrierbar sind; in diesem Fall setzt man

$$\int_a^b dx\ f(x) := \int_a^b dx\ (\operatorname{Re} f)(x) + \int_a^b dx\ (\operatorname{Im} f)(x)\ .$$

Damit ist jede Treppenfunktion auch Riemann-integrierbar, und ihr Riemann-Integral stimmt mit dem Integral nach Definition 19.2 überein. Im folgenden meinen wir mit 'integrierbar' stets 'Riemann-integrierbar'.

Satz 19.6 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ reellwertige Treppenfunktionen $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ existieren mit $\phi \leq f \leq \psi$ und*

$$\int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^b dx\ \phi(x) \leq \epsilon\ .$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Nach Definition von inf und sup gibt es eine Treppenfunktionen $\psi \geq f$ mit $\displaystyle\int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^{*b} dx\ f(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$ und eine Treppenfunktion $\phi \leq f$ mit $\displaystyle\int_{a*}^b dx\ f(x) - \int_a^b\ \phi(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

($\Leftarrow$) Nach Definition ist $\displaystyle\int_a^{*b} dx\ f(x) - \int_{a*}^b dx\ f(x) \leq \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$, also stimmen Ober- und Unterintegral überein. □

Satz 19.7 *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integierbar.*

Beweis. Nach Satz 14.11 sind stetige Funktionen auf kompakten Intervallen auch gleichmäßig stetig. Also gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{n} < \delta$ und die Unterteilungsstellen $x_k := a + k\frac{b-a}{n}$ mit $0 \leq k \leq n$. Für $1 \leq k \leq n$ setze $c_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ und $c'_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Konstruiere die Treppenfunktionen ϕ, ψ mit der Unterteilung $\{x_0, \dots, x_k\}$ derart, daß ψ auf $[x_{k-1}, x_k]$ den Wert c_k hat und ϕ auf $[x_{k-1}, x_k]$ den Wert c'_k. Nach Konstruktion gilt $\phi \leq f \leq \psi$.

Nach dem Satz vom Minimum/Maximum wird das Supremum und Infimum angenommen, d.h. es gibt $\xi_k, \xi'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit $c_k = f(\xi_k)$ und $c'_k = f(\xi'_k)$.

Wegen $|\xi_k - \xi'_k| < \delta$ ist $|c_k - c'_k| < \frac{\epsilon}{b-a}$ für alle k und deshalb $\psi(x) - \phi(x) < \frac{\epsilon}{b-a}$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt nach Satz 19.3

$$\int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^b dx\ \phi(x) = \int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |\psi(x) - \phi(x)| < \epsilon\ .$$

Nach Satz 19.6 ist f integrierbar. □

Satz 19.8 *Jede monotone beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. (für f monoton wachsend) Wir wählen eine äquidistante Unterteilung $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ und die Treppenfunktionen

$$\begin{aligned} \phi(x) &:= f(x_{k-1}) && \text{für } x_{k-1} \leq x < x_k \\ \psi(x) &:= f(x_k) && \text{für } x_{k-1} \leq x < x_k \end{aligned}$$

und $\phi(b) = \psi(b) = f(b)$. Dann gilt $\phi \leq f \leq \psi$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^b dx\ \phi(x) &= \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))\ . \end{aligned}$$

Wähle $n > \frac{1}{\epsilon}(b-a)(f(b) - f(a))$, dann ist f integrierbar nach Satz 19.6. □

Beispiel 19.9 Wir betrachten die monotone Funktion $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Dann ist mit den Bezeichnungen im vorigen Beweis

$$\begin{aligned} \int_0^b dx\ \psi(x) &= \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n \Big(\frac{kb}{n}\Big)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{3}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big)\ , \\ \int_0^b dx\ \phi(x) &= \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n \Big(\frac{(k-1)b}{n}\Big)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{3}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)\ . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{b^3}{3}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) \leq \int_0^b dx\ x^2 \leq \frac{b^3}{3}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big)$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, also $\displaystyle\int_0^b dx\ x^2 = \frac{b^3}{3}$.

Wir werden nun grundlegende Eigenschaften des Riemann-Integrals zeigen. Diese Beweise beruhen auf der Einschachtelung integrierbarer Funktionen durch Treppenfunktionen und sind leider etwas mühsam.

Satz 19.10 *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann ist auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b dx\ (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \int_a^b dx\ f(x) + \beta \int_a^b dx\ g(x)\ .$$

Beweis. Es genügt, den Satz für reellwertige f, g und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zu beweisen. Der allgemeine Fall läßt sich dann mit Definition 19.5 darauf zurückführen. Wir betrachten zunächst $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$. Nach Voraussetzung gibt es zu $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ mit $\phi_1 \leq f \leq \psi_1$ und $\phi_2 \leq g \leq \psi_2$ sowie

$$\int_a^b dx\ \psi_1(x) - \int_a^b dx\ \phi_1(x) \leq \frac{\epsilon}{2\alpha}\ , \qquad \int_a^b dx\ \psi_2(x) - \int_a^b dx\ \phi_2(x) \leq \frac{\epsilon}{2\beta}\ .$$

Dann ist $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \leq \alpha f + \beta g \leq \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$, und nach Satz 19.3 gilt

$$\int_a^b dx\ (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(x) - \int_a^b dx\ (\alpha\phi_1 + \beta\psi_2)(x) \leq \epsilon\ .$$

Damit ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar. Sowohl $I_1 = \int_a^b dx\ (\alpha f + \beta g)(x)$ als auch $I_2 = \alpha \int_a^b dx\ f(x) + \beta \int_a^b dx\ g(x)$ liegen zwischen $\int_a^b dx\ (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(x)$ und $\int_a^b dx\ (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)(x)$, also gilt $I_1 = I_2$.

Mit f ist auch $-f$ integrierbar durch Wahl der Treppenfunktionen $-\psi_1 \leq -f \leq -\phi_1$, so daß die Aussage auch für $\alpha < 0$ und/oder $\beta < 0$ gilt. $\square$

Satz 19.11 *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann gilt:*

i) *Ist $f \leq g$, so folgt $\int_a^b dx\ f(x) \leq \int_a^b dx\ g(x)$.*

ii) *Die Funktionen $f_+ := \max(f, 0)$ und $f_- := \max(-f, 0)$ sowie $|f| = f_+ + f_-$ sind integrierbar, und es gilt $\Big|\int_a^b dx\ f(x)\Big| \leq \int_a^b dx\ |f(x)|$.*

iii) *Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist die Funktion $|f|^p$ integrierbar.*

iv) *Die Funktion fg ist integrierbar.*

Beweis. i) Es ist $g - f \geq 0$ eine integrierbare Funktion, deren (Unter)integral $\geq$ dem Integral der Treppenfunktion 0 ist. Also ist $\displaystyle\int_a^b dx\ (g-f)(x) \geq 0$.

ii) Aus $\psi \geq f \geq \phi$ folgt $\psi_+ \geq f_+ \geq \phi_+$ und $\phi_- \geq f_- \geq \psi_-$. Dann gilt $\psi - \phi = (\psi_+ - \psi_-) - (\phi_+ - \phi_-) = \psi_+ - \phi_+ + (\phi_- - \psi_-) \geq \psi_+ - \phi_+$, also $\displaystyle\int_a^b dx\ (\psi_+ - \phi_+)(x) \leq \int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) \leq \epsilon$. Damit ist f_+ integrierbar, analog auch $f_- = (-f)_+$ und damit $|f| = f_+ + f_-$. Wegen $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ gelten $\displaystyle\int_a^b dx\ f(x) \leq \int_a^b dx\ |f(x)|$ und $\displaystyle-\int_a^b dx\ f(x) \leq \int_a^b dx\ |f(x)|$, folglich $\displaystyle\Big|\int_a^b dx\ f(x)\Big| \leq \int_a^b dx\ |f(x)|$.

iii) Die Funktion f ist beschränkt, $|f| \leq M$. Wegen der Linearität genügt es, $0 \leq f \leq 1$ zu betrachten. Nach Voraussetzung gibt es Treppenfunktionen ϕ, ψ mit $0 \leq \phi \leq f \leq \psi \leq 1$ und $\displaystyle\int_a^b dx\ \psi(x) - \int_a^b dx\ \phi(x) \leq \frac{\epsilon}{p}$. Die Funktionen ϕ^p und ψ^p sind wieder Treppenfunktionen mit $\phi^p \leq |f|^p \leq \psi^p$. Nach dem Schrankensatz 17.5 für die Funktion $h : \psi \mapsto \psi^p$ mit $0 \leq h' \leq p$ auf $[0,1]$ gilt $\frac{\psi^p - \phi^p}{\psi - \phi} \leq p$ und damit

$$\int_a^b dx\ (\psi^p - \phi^p)(x) \leq p \int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) \leq \epsilon\ .$$

Damit ist $|f|^p$ integrierbar.

iv) Verwende $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$. □

Insbesondere sind auch $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ und $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ integrierbar.

Wir zeigen nun, daß eine approximierende Treppenfunktion weitgehend beliebig ist, solange die Unterteilung genügend fein wird.

Satz 19.12 (Riemannsche Summen) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für eine beliebige Unterteilung $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$ von $[a,b]$ mit $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ und beliebige Wahl von Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt*

$$\Big|\int_a^b dx\ f(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\Big| < \epsilon\ .$$

Beweis. i) Sei zunächst f eine Treppenfunktion, die bezüglich einer Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ definiert ist, und $M := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung von $[a,b]$ mit $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, und für beliebige Wahl von Stützstellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ definieren wir eine Treppenfunktion $\Phi \in$

$\mathcal{T}[a,b]$ durch $\Phi(x) = f(\xi_k)$ für $x_{k-1} < x \le x_k$ und $\Phi(a) = f(\xi_1)$. Dann gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b dx\ \Phi(x)$ und

$$\Big|\int_a^b dx\ f(x) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\Big| \le \int_a^b dx\ |f(x) - \Phi(x)|\ .$$

Die Funktionen f und Φ stimmen auf jedem offenen Intervall $]x_{k-1}, x_k[$ überein, für das $[x_{k-1}, x_k]$ keinen Punkt t_j enthält. Damit ist $f - \Phi \neq 0$ höchstens auf $2m$ Teilintervallen. Deren Gesamtlänge ist $< 2m\delta$. Wegen $|f(x) - \Phi(x)| \le 2M$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$\int_a^b dx\ |f(x) - \Phi(x)| < 4M\delta\ .$$

ii) Sei nun f wieder eine beliebige integrierbare Funktion. Wähle $\delta < \frac{\epsilon}{8M}$ für die beiden Treppenfunktion ϕ, ψ mit $\phi \le f \le \psi$ und $\displaystyle\int_a^b dx\ (\psi - \phi)(x) < \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist auch

$$\sum_{k=1}^n \phi(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n \psi(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

d.h. es gilt

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \in \Big] -\frac{\epsilon}{2} + \int_a^b dx\ \phi(x), \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b dx\ \psi(x)\Big[$$

Aus $\displaystyle\int_a^b dx\ \psi(x) \le \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b dx\ f(x)$ und $\displaystyle\int_a^b dx\ \phi(x) \ge -\frac{\epsilon}{2} + \int_a^b dx\ f(x)$ folgt die Behauptung. □

Satz 19.13 *Für komplexwertige integrierbare Funktionen* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *gilt* $\displaystyle\Big|\int_a^b dx\ f(x)\Big| \le \int_a^b dx|f(x)| \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Beweis. Angenommen, $\displaystyle\Big|\int_a^b dx\ f(x)\Big| - \int_a^b dx\ |f(x)| = \epsilon > 0$. Wir wählen Riemannsche Summen für $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ und $|f|$ mit

$$\Big|\int_a^b dx\ (\operatorname{Re} f)(x) - \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re} f)(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\Big| < \frac{\epsilon}{4}\ ,$$

$$\Big|\int_a^b dx\ (\operatorname{Im} f)(x) - \sum_{i=1}^n (\operatorname{Im} f)(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\Big| < \frac{\epsilon}{4}\ ,$$

$$\Big|\int_a^b dx\ |f(x)| - \sum_{i=1}^n |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1})\Big| < \frac{\epsilon}{4}\ .$$

Die ersten beiden Ungleichungen ergeben

$$\Big| \int_a^b dx\ f(x) - \sum_{i=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \Big| < \frac{\epsilon}{4}\ .$$

Wegen $|\alpha| = |\beta + \alpha - \beta| \leq |\beta| + |\alpha - \beta|$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgt

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b dx\ f(x) \Big| \leq \frac{\epsilon}{2} + \Big| \sum_{i=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \Big| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^n |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}) \\ &< \frac{3\epsilon}{4} + \int_a^b dx\ |f(x)|\ , \end{aligned}$$

Widerspruch. Die Ungleichung $\displaystyle\int_a^b dx|f(x)| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ folgt aus $|f(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. □

Satz 19.14 *Sei $a < b < c$. Eine Funktion $f : [a,c] \to \mathbb{C}$ ist genau dann integrierbar, wenn f über $[a,b]$ und über $[b,c]$ integrierbar ist, und dann gilt $\displaystyle\int_a^c dx\ f(x) = \int_a^b dx\ f(x) + \int_b^c dx\ f(x)$.*

Beweis. Folgt durch Unterteilung der approximierenden Treppenfunktionen in b. □

Man setzt $\displaystyle\int_a^a dx\ f(x) := 0$ und $\displaystyle\int_b^a dx\ f(x) = -\int_a^b dx\ f(x)$ für $b \geq a$, falls f über $[a,b]$ integrierbar ist. Die Zusammensetzungsformel aus Satz 19.14 gilt dann für beliebige a, b, c, wenn f über $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$ integrierbar ist. Daraus erhalten wir im Beispiel 19.9

$$\int_a^b dx\ x^2 = \int_a^0 dx\ x^2 + \int_0^b dx\ x^2 = \int_0^b dx\ x^2 - \int_0^a dx\ x^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\ .$$

Satz 19.15 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $g \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $\displaystyle\int_a^b dx\ (fg)(x) = f(\xi) \int_a^b dx\ g(x)$. Für $g = 1$ gilt speziell $\displaystyle\int_a^b dx\ f(x) = (a-b)f(\xi)$ für ein $\xi \in [a,b]$.*

Beweis. Setzte $M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ und $m := \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, dann gilt $mg \leq fg \leq Mg$ und folglich

$$m \int_a^b dx\ g(x) \leq \int_a^b dx\ (fg)(x) \leq M \int_a^b dx\ g(x)\ .$$

Somit gibt es ein $\lambda \in [m, M]$ mit $\displaystyle\int_a^b dx\ (fg)(x) = \lambda \int_a^b dx\ g(x)$. Die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Supremum M und Infimum m an. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \lambda$. □

Man nennt $M(f) := \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b dx\ f(x)$ den Mittelwert der stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allgemeiner heißt $M_g(f) := \dfrac{\int_a^b dx\ (fg)(x)}{\int_a^b dx\ g(x)}$ der bezüglich g gewichtete Mittelwert von f.

20 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

20.1 Regelfunktionen

Definition 20.1 Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *Regelfunktion*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\phi \in \mathcal{T}[a, b]$ gibt mit $|f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in [a, b]$.

Wegen $\operatorname{Re}\phi - \epsilon \leq \operatorname{Re} f \leq \operatorname{Re}\phi + \epsilon$ sowie $\displaystyle\int_a^b dx\ (\operatorname{Re}\phi + \epsilon)(x) - \int_a^b dx\ (\operatorname{Re}\phi - \epsilon)(x) = 2\epsilon(b-a)$ und analog für die Imaginärteile ist jede Regelfunktion integrierbar. Die Konstruktionen in den Beweisen zu Satz 19.7 und Satz 19.8 zeigen, daß jede stetige Funktion und jede monotone Funktion eine Regelfunktion ist.

Satz 20.2 *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann existieren in jedem Punkt $x_0 \in [a, b[$ die rechtsseitigen Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$, und in jedem Punkt $x_0 \in]a, b]$ existieren die linksseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$.*

Beweis. (für rechsseitige Grenzwerte) Sei ϕ die Treppenfunktion mit $|f(x) - \phi(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in [a, b]$ und $]x_0, \beta[$ das Intervall, auf dem ϕ konstant ist. Dann gilt für alle $x, x' \in]x_0, \beta[$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - \phi(x)| + |\phi(x') - f(x')| \leq \epsilon$. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium existiert der Limes $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$. □

Wir betrachten nun die Abhängigkeit des Integrals von einer der Integrationsgrenzen als neue Funktion, die man auch *unbestimmtes Integral* nennt.

Satz 20.3 *Sei $F : I \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion und $a \in I$. Für $x \in I$ werde durch $F(x) := \displaystyle\int_a^x dt\ f(t)$ eine Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ definiert. Dann gilt: Die Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ ist stetig und in jedem Punkt $x_0 \in I$ sowohl linksseitig als auch rechtsseitig differenzierbar mit*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0+h) - F(x_0)\big) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)\ , \qquad \lim_{h \nearrow 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0+h) - F(x_0)\big) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)\ .$$

Insbesondere ist F differenzierbar in jedem Punkt $x \in I$, in dem f stetig ist, mit $F'(x) = f(x)$.

Beweis. Wegen $|F(x_1) - F(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \sup_{x\in[x_1,x_2]} |f(x)|$ ist F auf jedem abgeschlossenen Intervall Lipschitz-stetig und damit stetig.

Sei $A := \lim_{x\searrow x_0} f(x)$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta > 0$, so daß $|f(x) - A| < \epsilon$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \delta[$. Dann gilt für einen solchen Punkt x

$$\Big|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - A\Big| = \Big|\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} dx\ (f(x) - A)\Big| \leq \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} dx\ |f(x) - A| \leq \epsilon\ .$$

Damit existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\searrow x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ und ist gleich A. Analog für den linksseitigen Grenzwert. □

20.2 Stammfunktionen

Definition 20.4 Eine stetige Funktion $F : I \to \mathbb{C}$, für die eine Regelfunktion $f : I \to \mathbb{C}$ existiert mit

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0{+}h){-}F(x_0)\big) = \lim_{x\searrow x_0} f(x)\ , \qquad \lim_{h\nearrow 0} \frac{1}{h}\big(F(x_0{+}h){-}F(x_0)\big) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x)\ ,$$

heißt *Stammfunktion* zu f.

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Regelfunktion $f : I \to \mathbb{C}$ heißt das *unbestimmte Integral* zu f, geschrieben $\displaystyle\int dx\ f(x)$.

Nicht jede differenzierbare Funktion ist eine Stammfunktion. Es läßt sich zeigen (Königsberger, Analysis I), daß Funktionen, die mit Ausnahme abzählbar vieler Punkte stetig differenzierbar sind, Stammfunktion sind.

Satz 20.5 *Es sei $F : I \to \mathbb{C}$ Stammfunktion zu einer Regelfunktion $f : I \to \mathbb{C}$. Eine weitere Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann Stammfunktion zu f, wenn $F - G$ konstant ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Nach dem Identitätssatz 17.6 für stetige und differenzierbare Funktionen ist $F - G$ konstant in jedem offenen Intervall, in dem f stetig ist. Wegen der Stetigkeit von F, G ist $F - G$ dann auf ganz I konstant.

($\Leftarrow$) ist klar. □

Satz 20.6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Es sei $G : I \to \mathbb{C}$ eine beliebige Stammfunktion zu einer Regelfunktion $f : I \to \mathbb{C}$. Dann gilt für beliebige $a, b \in I$*

$$\int_a^b dx\ f(x) = G(b) - G(a)\ .$$

Beweis. Das ist klar für die Stammfunktion $F(x) = \int_a^x dx\ f(x)$. Für jede weitere Stammfunktion G gilt $G(x) = F(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{C}$, und in der Differenz $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ hebt sich die Konstante weg. □

Jede Ableitungsformel der Differentialrechnung liefert damit ein unbestimmtes Integral. Die Grundintegrale sind

$$
\begin{aligned}
\int dx\ x^s &= \frac{x^{s+1}}{s+1} + c\ , && x \in \mathbb{R} \text{ für } s \in \mathbb{N}\ , \quad x \in \mathbb{R}^* \text{ für } s \in \mathbb{Z}\ ,\ s \leq 2\ , \\
& && x \in \mathbb{R}^*_+ \text{ für } s \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \\
\int dx\ \frac{1}{x} &= \ln|x| + c\ , && x \neq 0 \\
\int dx\ e^{ax} &= \frac{1}{a} e^{ax} + c\ , && a \in \mathbb{C} \\
\int dx\ \sin x &= -\cos x + c\ , \\
\int dx\ \cos x &= \sin x + c\ , \\
\int dx\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + c\ , && |x| < 1 \\
\int dx\ \frac{1}{1+x^2} &= \arctan x + c\ , \\
\int dx\ \frac{1}{\cos^2 x} &= \tan x + c\ , && x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\
\int dx\ \frac{1}{\sin^2 x} &= -\cot x + c\ , && x \notin \pi\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefern diese unbestimmten Integrale ein Riemannsches Integral, falls das Intervall $[a, b]$ im Definitionsbereich der Stammfunktion liegt. So erhalten wir z.B.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b dx\ x^n &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}\ , \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \cos x &= \sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1\ , \\
\int_0^a dx\ e^x &= e^a - 1\ .
\end{aligned}
$$

Ist F die Stammfunktion zu f, dann ist für das Riemannsche Integral die folgende Schreibweise üblich:

$$\int_a^b dx\ f(x) = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)\ ,$$

also z.B. $\displaystyle\int_0^1 dx\ \frac{1}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

20.3 Partielle Integration

Aus der Produktregel für das Differential gewinnt man die folgende Rechenregel:

Satz 20.7 (partielle Integration) . *Es seien $u, v : I \to \mathbb{C}$ Stammfunktionen zu Regelfunktionen $f = v' : I \to \mathbb{C}$ und $g = u' : I \to \mathbb{C}$ (die Ableitung ist im Sinne von Definition 20.4 zu verstehen). Dann ist auch uv eine Stammfunktion, und es gilt*

$$\int dx\ (uv')(x) = (uv)(x) - \int dx\ (u'v)(x)\ ,$$
$$\int_a^b dx\ (uv')(x) = uv\Big|_a^b - \int_a^b dx\ (u'v)(x)\ .$$

Beweis. Folgt (mit einseitigen Grenzwerten) aus der Rechnung zur Produktregel in Satz 16.6. □

Beispiel 20.8 $I_n(x) := \displaystyle\int dx\ \sin^n x$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Wir setzen $u = \sin^{n-1} x$, $v = -\cos x$, dann folgt mit partieller Integration (die Konstante c ist weggelassen)

$$\begin{aligned}\int dx\ \sin^n x &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int dx\ ((n-1)\cos x \sin^{n-2} x)\cos x \\ &= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int dx\ \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\ .\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Rekursionsformel

$$I_n(x) = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\ ,$$

aus der mit $I_0 = x$ und $I_1 = -\cos x$ die unbestimmten Integrale berechnet werden können, z.B. $\displaystyle\int dx\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$. Interessant sind die Riemannschen Integrale ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

$$\begin{aligned}A_{2k} &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \sin^{2k} x = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}\ , \\ A_{2k+1} &:= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \sin^{2k+1} x = \frac{2k(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3}\ .\end{aligned}$$

Wegen $0 \leq \sin^{2k+2} x \leq \sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq 1$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $0 \leq A_{2k+2} \leq A_{2k+1} \leq A_{2k} \leq \frac{\pi}{2}$. Andererseits ist $\lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+2}}{A_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+2} = 1$, also auch $\lim_{k\to\infty} \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}} = 1$ und daraus

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)^2(2k-2)^2 \cdots 2^2}{(2k+1)(2k-1)(2k-2+1)(2k-2-1)\cdots(2+1)(2-1)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} .\end{aligned}$$

Diese Formel heißt *Wallissches Produkt.*

Beispiel 20.9 $\displaystyle\int dx\ \arcsin x$. Wir setzen $u = \arcsin x$, $v = x$, dann folgt mit partieller Integration und $\sqrt{1-x^2}' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int dx\ \arcsin x = x \arcsin x - \int dx\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\ .$$

Ähnlich zeigt man $\displaystyle\int dx\ \arctan x = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Beispiel 20.10 $\displaystyle\int dx\ \sqrt{1-x^2}$. Wir setzen $v = x$, $u = \sqrt{1-x^2}$, dann folgt

$$\begin{aligned}\int dx\ \sqrt{1-x^2} &= x\sqrt{1-x^2} - \int dx\ x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int dx\ \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int dx\ \sqrt{1-x^2} + \arcsin x\end{aligned}$$

also $\displaystyle\int dx\ \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$. Der Graph $(x, \sqrt{1-x^2})$ für $x \in [0,1]$ beschreibt einen Viertelkreisbogen mit Radius 1. Dementsprechend ist $\displaystyle\int_0^1 dx\ \sqrt{1-x^2} = \Big(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\Big)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ die Fläche der Viertelkreisscheibe, d.h. die Kreisscheibe vom Radius 1 hat die Fläche π.

Satz 20.11 (Trapezregel) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $a, b \in I$. Dann ist*

$$\begin{aligned}&\int_a^b dx\ f(x) = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - R\ , \\ &\qquad R = \frac{1}{2}\int_a^b dx\ (x-a)(b-x)f''(x) = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad \textit{für ein } \xi \in [a,b]\ .\end{aligned}$$

Beweis. Setze $g = \frac{1}{2}(x-a)(b-x)$ mit $g'(x) = \frac{1}{2}(b+a-2x)$ und $g''(x) = -1$. Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} R = \int_a^b dx\ (gf'')(x) &= (gf')(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\ (g'f')(x) \\ &= -(g'f)(x)\Big|_a^b + \int_a^b dx\ (g''f)(x) = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \int_a^b dx\ f(x)\ . \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_a^b dx\ (x-a)(b-x)f''(x) &= \frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b dx\ (x-a)(b-x) \\ &= \frac{1}{2}f''(\xi)\Big(\frac{x^2}{2}(a+b) - \frac{x^3}{3} - abx\Big)\Big|_a^b = \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)\ . \end{aligned}$$

□

Approximiert man eine viermal stetig differenzierbare Funktion f durch eine Parabel mit gleichen Funktionswerten in $a, b, \frac{a+b}{2}$, so entsteht die *Keplersche Faßregel*

$$\int_a^b dx\ f(x) = \frac{b-a}{6}(f(b)+f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})) - R\ , \qquad R = \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$$

für ein $\xi \in [a,b]$. Sie liefert für Graphen kubischer Polynome eine exakte Formel (d.h. $R = 0$) zur Flächenberechnung.

20.4 Substitutionsregel

Aus der Kettenregel für die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion gewinnen wir die sehr wichtige Substitutionsregel:

Satz 20.12 *Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion, $F : I \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f und $t : [a,b] \to I$ eine stetig differenzierbare und streng monotone Funktion. Dann ist $F \circ t : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu $(f \circ t) \cdot t' : [a,b] \to \mathbb{C}$, und es gilt*

$$\int_a^b dx\ f(t(x)) \cdot t'(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\ f(t)\ .$$

Beweis. Wir wiederholen den Beweis der Kettenregel in Satz 16.8 für rechtsseitige Grenzwerte und t streng monoton wachsend. Für $x_0 \in [a,b[$ sei $y_0 := t(x_0) \in I$ und $A := \lim_{y\searrow y_0} f(y)$. Setze $\phi(y) := \begin{cases} \frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} & \text{für } y > y_0 \\ A & \text{für } y = y_0 \end{cases}$ Nach Voraussetzung gilt $\lim_{y\searrow y_0}\phi(y) = \phi(y_0) = A$ und $F(y) - F(y_0) = (y-y_0)\phi(y)$ für alle

$y \in I$ mit $y \geq y_0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x \searrow x_0} \frac{F(t(x)) - F(t(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \searrow x_0} \frac{\phi(t(x)) \cdot (t(x) - t(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \searrow x_0} \phi(t(x)) \cdot \lim_{x \searrow x_0} \frac{t(x) - t(x_0)}{x - x_0} \\ &= \phi(t(x_0)) \cdot t'(x_0) = A \cdot t'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(t(x)) \cdot t'(x) \,.\end{aligned}$$

Analog für linksseitige Grenzwerte und/oder t streng monoton fallend. Also ist $(F \circ t)(x)$ Stammfunktion zu $((f \circ t) \cdot t')(x)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b dt\; f(t(x)) \cdot t'(x) = (F \circ t)(x)\Big|_a^b = F(t(b)) - F(t(a)) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\; f(t) \,. \qquad \square$$

Beispiel 20.13 $\displaystyle\int_a^b dx\;\; f(\alpha x + \beta)$ mit $\alpha \neq 0$. Setze $t(x) = \alpha x + \beta$, $t'(x) = \alpha$, dann ist

$$\int_a^b dx\; f(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(t(x)) \cdot t'(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} dt\; f(t) \,.$$

Beispiel 20.14 Oft gelingt es, Integrale in der Form $\displaystyle\int dx\; \frac{t'(x)}{t(x)}$ zu identifizieren für eine stetig differenzierbare Funktion $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $t(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Setzt man $f(t) = \frac{1}{t}$, so ist

$$\int_a^b dx\; \frac{t'(x)}{t(x)} = \int_a^b dx\; f(t(x))t'(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\; f(t) = \ln|t|\Big|_{t(a)}^{t(b)} = \ln\left|\frac{t(b)}{t(a)}\right| \,.$$

Z.B. erhalten wir für $[a, b] \subset \,]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\int_a^b dx\;\; \tan x = -\int_a^b dx\; \frac{\cos'(x)}{\cos x} = -\ln\left|\frac{\cos b}{\cos a}\right| \,.$$

Das entsprechende unbestimmte Integral ist $\displaystyle\int dx\;\; \tan x = -\ln|\cos x| + c$. Analog ist $\displaystyle\int dx\;\; \cot x = \ln|\sin x| + c$.

Beispiel 20.15 $\displaystyle\int_a^b dx\;\; \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. Setze $x = \sinh t$, also $t(x) = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (Siehe den letzten Teil von 15.3.) Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(t(x))} = \frac{1}{\cosh t(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 t(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \,.$$

Also ist $f(t) = 1$ und

$$\int_a^b dx\, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt\, 1 = \operatorname{arsinh}(b) - \operatorname{arsinh}(a) = \ln \frac{b+\sqrt{b^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}\,.$$

Das entsprechende unbestimmte Integral ist $\displaystyle\int dx\, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$. Analog zeigt man $\displaystyle\int dx\, \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c$ für $|x| \geq 1$.

Beispiel 20.16 (Integration rationaler Funktionen) Durch Partialbruchzerlegung (Satz 11.4) lassen sich rationale Funktionen darstellen als Summe von Polynomen und Funktionen der Form $\frac{b}{(x-a)^k}$ mit $a,b \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Handelt es sich um eine reelle rationale Funktion, so treten die zueinander komplex-konjugierten Funktionen $\frac{b}{(x-a)^k}$ und $\frac{\bar{b}}{(x-\bar{a})^k}$ in der Summe gemeinsam auf. Für $k \geq 2$ wird für reelle und komplexe Nullstellen gleichermaßen $\displaystyle\int dx\, \frac{b}{(x-a)^k} = \frac{b}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c$ erhalten. Für $k=1$ und eine reelle Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ hat man $\displaystyle\int dx\, \frac{b}{(x-a)} = b \ln|x-a| + c$. Ist $k=1$ und $a \notin \mathbb{R}$, so muß man, wenn man komplexe Logarithmen vermeiden möchte, die beiden komplex-konjugierten Funktionen wieder zusammenfassen zu

$$\frac{b}{(x-a)} + \frac{\bar{b}}{(x-\bar{a})} = \frac{2x\mathrm{Re}(b) - 2\mathrm{Re}(\bar{b}a)}{(x-\mathrm{Re}(a))^2 + (\mathrm{Im}(a))^2} =: \frac{Bx+C}{(x+p)^2+q^2}\,,$$

mit $B,C,p,q \in \mathbb{R}$ und $q>0$. Man schreibt $Bx + C = \frac{B}{2}(2x+2p) + (C-Bp)$, so daß ein Term $\frac{B}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}$ mit $f(x) = (x+p)^2+q^2$ entsteht, der die Stammfunktion $\frac{B}{2}\ln|f(x)|$ hat. Der verbleibende Teil wird nach Substitution $t = \frac{x+p}{q}$ zum arctan:

$$\int dx\, \frac{Bx+C}{(x+p)^2+q^2} = \frac{B}{2}\ln((x+p)^2+q^2) + \frac{C-Bp}{q} \arctan \frac{x+p}{q}\,.$$

In vielen anderen Fällen gibt es Substitutionen $t(x)$, die auf rationale Funktionen in t führen:

Beispiel 20.17 Es sei $\displaystyle\int dx\;\, R(\cos x, \sin x)$ für eine rationale Funktion R von $\sin x$ und $\cos x$. Setzt man

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,,\ t'(x) = \frac{1}{2}(1+t^2)\,,$$

so entsteht

$$\int_a^b dx\; R(\cos x, \sin x) = \int_{\tan\frac{a}{2}}^{\tan\frac{b}{2}} dt\; R\big(\tfrac{1+t^2}{1+t^2}, \tfrac{2t}{1+t^2}\big)\tfrac{2}{1+t^2}\;.$$

Eine solche rationale Funktion kann mit dem in Beispiel 20.16 beschriebenen Verfahren integriert werden.

Beispiel 20.18 $\displaystyle\int dx\;\; R(e^{px})$ für $p \in \mathbb{R}^*$ und eine rationale Funktion R. Die Transformation $t = e^{px}$ führt auf

$$\int_a^b dx\; R(e^{px}) = \frac{1}{p}\int_{e^{pa}}^{e^{pb}} dt\; R(t)\frac{1}{t}\;.$$

Insbesondere lassen sich auf diese Weise rationale Funktionen von $\sinh x$ und $\cosh x$ integrieren.

Beispiel 20.19 $\displaystyle\int dx\;\; R(x, \sqrt[n]{px+q})$ für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $p \in \mathbb{R}^*$, $q \in \mathbb{R}$. Die Transformation $t = \sqrt[n]{px+q}$ führt auf eine rationale Funktion:

$$\int_a^b dx\; R(x, \sqrt[n]{px+q}) = \frac{n}{p}\int_{\sqrt[n]{pa+q}}^{\sqrt[n]{pb+q}} dt\; R\big(\tfrac{t^n-q}{p}, t\big)t^{n-1}\;.$$

Beispiel 20.20 $\displaystyle\int dx\;\; R(x, \sqrt{px^2+qx+r})$ für $p \in \mathbb{R}^*$ und $q, r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq \frac{q^2}{4p}$. Durch quadratische Ergänzung $px^2+qx+r = p(x+\frac{q}{2p})^2 + r - \frac{q^2}{4p}$ und linearer Substitution $t = \sqrt{\big|\frac{4p^2}{4pr-q^2}\big|(x+\frac{q}{2p})^2}$ entsteht je nach Vorzeichen von p und $4pr-q^2$ eines der Integrale

$$\int dt\; R'(t, \sqrt{t^2+1})\;, \qquad \int dt\; R'(t, \sqrt{t^2-1})\;, \qquad \int dt\; R'(t, \sqrt{1-t^2})\;,$$

welches durch $t = \sinh y$, $t = \cos y$ bzw. $t = \sin y$ auf eine rationale Funktion von e^{sy} bzw. $\sin y$ und $\cos y$ zurückgeführt wird.

21 Uneigentliche Integrale

Wir haben bisher nur Funktionen über kompakten (beschränkt und abgeschlossen) Intervallen intgriert. Wünschenswert wäre aber auch die Integration über offene Intervalle sowie über unbeschränkte Intervalle. Solche "uneigentlichen Integrale" können über einen Grenzprozeß Riemannscher Integrale erhalten werden.

Definition 21.1 Eine Funktion $f : [a, \infty[\to \mathbb{C}$ sei über jedes kompakte Intervall $[a, R]$ mit $R > a$ integrierbar. Existiert der Limes $\lim_{R\to\infty} \int_a^R dx\ f(x)$, dann heißt das Integral $\int_a^\infty dx\ f(x)$ *konvergent*, und man setzt $\int_a^\infty dx\ f(x) := \lim_{R\to\infty} \int_a^R dx\ f(x)$.

Analog wird für $f :]-\infty, b] \to \mathbb{C}$ im Fall der Konvergenz das Integral $\int_{-\infty}^b dx\ f(x)$ definiert.

Beispiel 21.2 Das Integral $\int_1^\infty dx\ \frac{1}{x^s}$ konvergiert für $s > 1$. Es gilt

$$\int_1^R dx\ \frac{1}{x^s} = \begin{cases} \frac{R^{1-s}-1}{1-s} & \text{für } s \neq 1 \\ \ln R & \text{für } s = 1 \end{cases}$$

Der Grenzwert für $R \to \infty$ existiert genau für $s > 1$, und es gilt $\int_1^\infty dx\ \frac{1}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ für alle $s > 1$.

Definition 21.3 Es sei $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ eine Funktion, die über jedes Teilintervall $[a, b-\epsilon]$ mit $0 < \epsilon < b - a$ integrierbar ist. Existiert der einseitige Grenzwert $\lim_{\epsilon\searrow 0} \int_a^{b-\epsilon} dx\ f(x)$, so heißt das Integral $\int_a^b dx\ f(x)$ *konvergent*, und man setzt $\int_a^b dx\ f(x) := \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_a^{b-\epsilon} dx\ f(x)$.

Analog wird für $f :]a, b] \to \mathbb{C}$ im Fall der Konvergenz das Integral $\int_a^b dx\ f(x)$ definiert.

Beispiel 21.4 $\int_0^1 dx\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist auf $[0, 1[$ definiert, und auf dem kompakten Teilintervall $[0, 1-\epsilon]$ gilt

$$\int_0^{1-\epsilon} dx\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1-\epsilon} = \arcsin(1-\epsilon)\ .$$

Der arcsin ist stetig auf $[-1, 1]$, so daß gilt $\lim_{\epsilon\searrow 0} \arcsin(1-\epsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ und damit $\int_0^1 dx\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

Definition 21.5 Es sei $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, die über jedes kompakte Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ integrierbar ist, und $c \in]a, b[$. Existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_c^b dx\ f(x) = \lim_{\beta\nearrow b} \int_c^\beta dx\ f(x) \quad \text{und} \quad \int_a^c dx\ f(x) = \lim_{\alpha\searrow a} \int_\alpha^c dx\ f(x)\ ,$$

so heißt das Integral $\int_a^b dx \;\; f(x)$ *konvergent*, und man setzt $\int_a^b dx \;\; f(x) \;:= \int_a^c dx\; f(x) + \int_c^b dx\; f(x)$. (Die Definition ist unabhängig von der Wahl von $c \in]a,b[$.)

Beispiel 21.6 $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{1+x^2}$. Zu betrachten sind die Integrale $\int_0^R dx\, \frac{1}{1+x^2} = \arctan(R)$ und $\int_{-R'}^0 dx\, \frac{1}{1+x^2} = -\arctan(-R') = \arctan R'$. Der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \arctan(R) = \frac{\pi}{2}$ existiert, somit gilt $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{1+x^2} = \pi$.

Satz 21.7 (Majorantenkriterium) *Es seien $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ und $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ Regelfunktionen mit $|f| \leq g$. Existiert das Integral $\int_a^b dx\, g(x)$, dann existiert auch $\int_a^b dx\; f(x)$.*

Beweis. Seien F, G die Stammfunktionen zu f, g für kompakte Teilintervalle in $[a,b[$, d.h.

$$\int_a^u dx\; f(x) = F(u) - F(a)\;, \qquad \int_a^u dx\; g(x) = G(u) - G(a)\;, \qquad a < u < b\;.$$

Aus der Existenz von $\int_a^b dx\, g(x)$ folgt, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\beta \in]a,b[$ gibt, so daß für alle $u, v \in]\beta, b[$ gilt $|G(u) - G(v)| \leq \epsilon$. Für diese $u > v$ gilt dann

$$|F(u) - F(v)| = \Big| \int_v^u dx\; f(x) \Big| \leq \int_v^u dx\; |f(x)| \leq \int_v^u dx\; g(x) = G(u) - G(v) \leq \epsilon\;.$$

(G ist monoton wachsend wegen $g \geq 0$). Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium existiert der Limes $\lim_{u\nearrow b} F(u)$ und damit das Integral $\int_a^b dx\;\; f(x)$.
□

Beispiel 21.8 *Das Integral* $\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x}$ *ist konvergent.*

Beweis. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ und damit über jedes kompakte Teilinvervall von $\mathbb{R}$ integrierbar. Damit ist nur die obere Integrationsgrenze kritisch, und es genügt, das Integral über $[1, \infty[$ zu betrachten. Partielle Integration liefert

$$\int_1^R dx\, \frac{\sin x}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^R - \int_1^R dx\, \frac{\cos x}{x^2} = \cos 1 - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R dx\, \frac{\cos x}{x^2}\;.$$

Es gilt $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ für alle $x \in [1,\infty[$ und $\displaystyle\int_1^R dx \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{R}$. Damit ist das Integral $\displaystyle\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x}$ konvergent. Der Grenzwert kann später mit Fourier-Reihen berechnet werden; es gilt $\displaystyle\int_0^\infty dx\, \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Das Integral ist aber *nicht absolut konvergent.* Zerlegung in Intervalle der Länge π ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} dx\, \left|\frac{\sin x}{x}\right| &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} dx\, \left|\frac{\sin x}{x}\right| \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} dx\, |\sin x| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi dx\ \sin x = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\ .\end{aligned}$$

Die harmonischen Reihe divergiert, d.h. der Limes $n \to \infty$ existiert nicht.

Satz 21.9 (Integralvergleichskriterium für Reihen) *Es sei* $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}_+$ *eine monoton fallende Funktion. Dann konvergiert die Folge der Differenzen*

$$a_n := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} dx\ f(x)\ ,$$

und für ihren Grenzwert gilt $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq f(1)$. *Insbesondere konvergiert die Reihe* $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty f(k)$ *genau dann, wenn das Integral* $\displaystyle\int_1^\infty dx\ f(x)$ *konvergiert, und in diesem Fall gilt*

$$0 \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty dx\ f(x) \leq f(1)\ .$$

Beweis. Es gilt $f(k) \geq \displaystyle\int_k^{k+1} dx\ f(x) \geq f(k+1)$, da f monoton fallend. Damit wächst $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton, andererseits gilt

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} dx\ f(x) \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^n f(k+1) = f(1) - f(n+1) \leq f(1)\ .$$

Somit ist $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert zwischen 0 und $f(1)$. □

Beispiel 21.10 Es existiert der Grenzwert $\gamma := \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\Big)$ mit $0 \leq \gamma \leq 1$. Zum Beweis verwende man den Satz 21.9 für $f(x) = \frac{1}{x}$ und $\lim_{n\to\infty}(ln(n+1) - \ln(n))0$. Der Grenzwert heißt *Eulersche Konstante* oder auch Euler-Mascheroni-Konstante. Mit Methoden analog zur Trapezregel kann man $\gamma = 0.5772\ldots$ berechnen.

Teil VI

Wichtige Ergänzungen

22 Gleichmäßig konvergente Funktionsfolgen und Reihen

Wir verallgemeinern zunächst Definition 12.11 auf allgemeine Folgen von Funktionen:

Definition 22.1 Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in D$ und alle $n \geq N$.

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von Funktionen $f_K : D \to \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig konvergent* auf D, wenn die Folge der Partialsummen $F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig konvergiert.

Nach Satz 12.12 ist die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen wieder stetig. Gleichmäßige Konvergenz kann mit dem Cauchy-Kriterium überprüft werden:

Satz 22.2 (Cauchy-Kriterium) *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann gleichmäßig konvergent auf D, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ für alle $m, n \geq N$ und alle $x \in D$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) durch Dreiecksungleichung für $f_n - f_m = (f_n - f) + (f - f_m)$, wenn f die Gremzfunktion ist.

($\Leftarrow$) Grenzfunktion f existiert punktweise nach Cauchy-Kriterium. Für $m \to \infty$ ergibt sich $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$. $\square$

Entsprechend gilt für Reihen, daß $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ genau dann gleichmäßig konvergent ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\Big|\displaystyle\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\Big| \leq \epsilon$ für alle $m, n \geq N$ und alle $x \in D$. Insbesondere ist jede Potenzreihe gleichmäßig konvergent im Inneren ihres Konvergenzkreises.

Bei der Untersuchung der gleichmäßigen Konvergenz und der Bestimmung der Grenzfunktion sind Methoden aus der Integralrechnung oft hilfreich.

Beispiel 22.3 *Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$ für alle $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ mit $0 < \delta < \pi$.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}kt} &= e^{\mathrm{i}t}\frac{1 - e^{\mathrm{i}nt}}{1 - e^{\mathrm{i}t}} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{(2n+1)t}{2}} - e^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}}{2\mathrm{i}\sin\frac{t}{2}} \\
&= \Big(\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\Big) + \mathrm{i}\Big(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2} - \frac{\cos\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\Big)\,,
\end{aligned}$$

also $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$. Wegen $\displaystyle\frac{\sin(kx)}{k} = \int_{\pi}^{x} dt\ \cos(kt)$ gilt für endliche Summen nach partieller Integration

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} &= \int_{\pi}^{x} dt\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \int_{\pi}^{x} dt\ \Big(\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\Big)\\ &= \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2n+1}\frac{\cos\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Big|_{\pi}^{x} + \int_{\pi}^{x} dt\ \frac{\cos\frac{(2n+1)t}{2}}{2n+1}\cdot\frac{(-\cos\frac{t}{2})}{2\sin^2\frac{t}{2}}\ .\end{aligned}$$

Punktweise für festes $x \in\ ]0, 2\pi[$ erhalten wir im Limes $n \to \infty$ die behauptete Grenzfunktion. □

Für $x = 0$ und $x = 2\pi$ ist offenbar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = 0$. Somit gilt unter Beachtung der Periodizität des Sinus

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{(2n+1)\pi - x}{2} & \text{für } x \in\ ]2\pi n, 2\pi(n+1)[\end{cases}$$

d.h. die Grenzfunktion ist nicht stetig.

Beispiel 22.4 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$ *konvergiert auf* $[\delta, 2\pi - \delta]$ *mit* $0 < \delta < \pi$ *gleichmäßig gegen die Grenzfunktion.*

Beweis. Es sei $s_n(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)$. Aus Beispiel 22.3 folgt $|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$ für alle $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben für $m \geq n \geq 1$ den Cauchy-Term der interessierenden Reihe als

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=n}^{m}\frac{\sin(kx)}{k}\Big| &= \Big|\sum_{k=n}^{m}\frac{s_k(x) - s_{k-1}(x)}{k}\Big|\\ &= \Big|\Big(\sum_{k=n}^{m} s_k(x)\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big)\Big) + \frac{s_m(x)}{m+1} - \frac{s_{n-1}(x)}{n}\Big|\\ &\leq \Big(\sum_{k=n}^{m}|s_k(x)|\Big|\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big|\Big) + \Big|\frac{s_m(x)}{m+1}\Big| + \Big|\frac{s_{n-1}(x)}{n}\Big|\\ &\leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\Big) = \frac{2}{n\sin\frac{\delta}{2}}\ .\end{aligned}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$ gleichmäßig konvergent auf $[\delta, 2\pi-\delta]$.

□

Solche Summierungstechniken sind oft hilfreich bei der Untersuchung von Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) f_k(x)$ für monoton fallende reellwertige positive Funktionen f_k und komplexertige Funktionen a_k mit kontrollierter Summe $\Big|\sum_{k=0}^n a_k\Big|$.

Satz 22.5 *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist auch f integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b dx\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b dx\ f_n(x)\ .$$

Beweis. Es genügt, reellwertige Funktionen zu betrachten. Nach Definition der gleichmäßigen Konvergenz gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3(b-a)}$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [a,b]$. Aus der Integrierbarkeit von f_n folgt, daß es Treppenfunktionen $\phi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ gibt mit $\phi \leq f_n \leq \psi$ und $\int_a^b dx\ (\psi-\phi)(x) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Dann gilt auch $\phi - \frac{\epsilon}{3(b-a)} \leq f \leq \psi + \frac{\epsilon}{3(b-a)}$ sowie

$$\int_a^b dx\ \Big(\psi + \frac{\epsilon}{3(b-a)}\Big)(x) - \int_a^b dx\ \Big(\phi - \frac{\epsilon}{3(b-a)}\Big)(x) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3(b-a)} \int_a^b dx\ 1 = \epsilon\ .$$

Somit ist f integrierbar. Damit gilt

$$\Big|\int_a^b dx\ f(x) - \int_a^b dx\ f_n(x)\Big| \leq \int_a^b dx\ |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}\ ,$$

d.h. Grenzwert und Integration vertauschen. $\square$

Auf gleichmäßige Konvergenz der Funktionsfolge kann nicht verzichtet werden.

Beispiel 22.6 Für $n \geq 2$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n := \max(n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0)$. Die punktweise gebildete Grenzfunktion ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Denn $f(0) = 0$ für alle $n \geq 2$, und für jedes $x_0 \in [0,1]$ gilt für $N \geq \frac{2}{x_0}$ mit $N \in \mathbb{N}$, daß $f_n(x_0) = 0$ für alle $n \geq N$. Allerdings ist $(f_n)_{n\geq 2}$ nicht gleichmäßig konvergent gegen 0, da es für $\epsilon = 1$ und für jedes $N \geq 2$ ein $x \in [0,1]$ und ein $n \geq N$ gibt, z.B. $x = \frac{1}{n}$, mit $|f_n(x) - 0| > 1$. Für die Integrale haben wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx\ f_n(x) &= \int_0^{\frac{1}{n}} dx\ \big(n + n^2(x - \tfrac{1}{n})\big) + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} dx\ \big(n - n^2(x - \tfrac{1}{n})\big)\\ &= \big(n^2 \tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_0^{\frac{1}{n}} + \big(2nx - n^2\tfrac{x^2}{2}\big)\Big|_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = 1\ ,\end{aligned}$$

aber für die Grenzfunktion $\int dx\ 0 = 0$.

Entsprechend Satz 22.5 gilt:

Satz 22.7 *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *eine Reihe integrierbarer Funktionen* $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$*, die gleichmäßig gegen* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *konvergiert. Dann ist auch* f *integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b dx \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b dx\ f_n(x)\ .$$

Beweis. Man wende Satz 22.5 auf die Folge der Partialsummen $F_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$, welche wieder integrierbare Funktionen sind, an. □

Beispiel 22.8 (Wahrscheinlichkeitsintegral) Die Funktion $W(x) := \int_0^x dt\ e^{-\frac{t^2}{2}}$ heißt *Gaußsches Wahrscheinlichkeitsintegral.* Die Exponentialfunktion ist gleichmäßig konvergent in jedem kompakten Intervall $[0,x] \subset \mathbb{R}_+$, so daß Integration und Summe vertauschen:

$$W(x) = \int_0^x dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \int_0^x dt\ t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k (2k+1) k!}\ .$$

Beispiel 22.9 (Elliptisches Integral) Die Berechnung der Schwingungsdauer T des mathematischen Pendels als Lösung der Differentialgleichung $f''(x) + \omega^2 \sin(f(x)) = 0$ führt auf das *elliptische Integral* $\frac{T\omega}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ mit Anfangsauslenkung $k = \sin\frac{x_0}{2}$. Unter Verwendung der Binomialreihen aus Beispiel 10.5 erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-k^2 \sin^2 x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} k^{2n} A_{2n}$$

mit den Integralen $A_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\ \sin^{2n} x$ aus Beispiel 20.8. Damit gilt

$$\frac{T\omega}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)}\Big)^2 k^{2n}\right)\ .$$

Wir nutzen nun den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, um eine zu Satz 16.12 ähnliche Aussage über die Differenzierbarkeit von Funktionsreihen zu erhalten:

Satz 22.10 *Es seien* $f_n : I \to \mathbb{C}$ *mit* $I \subset \mathbb{R}$ *stetig differenzierbare Funktionen, für die gilt:*

i) *Die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise auf* I.

ii) *Die Folge* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig auf* I.

Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *stetig differenzierbar, und es gilt* $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Beweis. Die Grenzfunktion der Ableitungen $f^* := \lim_{n\to\infty} f_n'$ ist nach Satz 12.12 stetig auf I. Für festes $a \in I$ gilt $f_n(x) = f_n(a) + \displaystyle\int_a^x dt\ f_n'(t)$ für alle $x \in I$. Nach Satz 22.5 wird im Limes $n \to \infty$ daraus $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x dt\ f^*(t)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist f differenzierbar mit $f' = f^*$, also sogar stetig differenzierbar. $\square$

Auf gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen kann nicht verzichtet werden. Z.B. konvergiert die Folge der Funktionen $f_n = \frac{1}{(n+1)}\sin((n+1)x)$ gleichmäßig gegen 0, aber die Folge der Ableitungen $f_n' = \cos((n+1)x)$ hat überhaupt keine Grenzfunktion.

Beispiel 22.11 Wir berechnen erneut $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $|x| < 1$. Inerhalb des Konvergenzradius $R = 1$ konvergiert f absolut, insbesondere auch punktweise. Die Reihe der Ableitungen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ ist für $|x| < 1$ absolut, damit gleichmäßig, konvergent gegen $\frac{1}{1-x}$. Nach Satz 22.10 gilt $f'(x) = \frac{1}{1-x}$, also $f(x) = -\ln|1-x| + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Die Integrationskonstante ergibt sich für $x = 0$ zu $c = 0$, d.h. es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ für alle $x \in]-1, 1[$.

Beispiel 22.12 *Für alle* $x \in [0, 2\pi]$ *gilt* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$, *insbesondere* $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Beweis. Die Reihe $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ ist absolut konvergent auf $\mathbb{R}$, damit auch gleichmäßig konvergent. Die Reihe der Ableitungen $f'(x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ ist nach Beispiel 22.4 gleichmäßig konvergent auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ gegen die Grenzfunktion $\frac{x-\pi}{2}$. Somit gilt für alle $x \in]0, 2\pi[$ nach Satz 22.10 die Beziehung $f(x) = \frac{(x-\pi)^2}{4} + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Da f als gleichmäßig konvergente Reihe stetig ist, gilt diese Beziehung sogar für $x \in [0, 2\pi]$. Integration liefert

$$\int_0^{2\pi} dx\ f(x) = \Big(\frac{(x-\pi)^3}{12} + cx\Big)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c\ .$$

Andererseits gilt nach Satz 22.5

$$\int_0^{2\pi} dx\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} dx\ \cos(kx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin(kx)\Big|_0^{2\pi} = 0\ .$$

Somit gilt $c = -\frac{\pi^2}{12}$. □

23 Die Γ-Funktion

Satz 23.1 *Das uneigentliche Integral* $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{\infty} dt\ t^{x-1}\, e^{-t}$ *ist konvergent für alle* $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Es gilt*

i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}_+^*$

ii) $\Gamma(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n) = (n-1)!$ *für alle* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Beweis. Kritisch sind beide Integrationsgrenzen. Wegen $\lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$ gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}_+^*$ ein $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, so daß $t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$ für alle $t \geq t_0$. Zerschneiden des Integrals bei t_0 liefert für $0 < \epsilon < t_0$

$$0 \leq \int_\epsilon^{t_0} dt\ t^{x-1}\, e^{-t} \leq \int_\epsilon^{t_0} dt\ t^{x-1} = \frac{t_0^x - \epsilon^x}{x} \leq \frac{t_0^x}{x}\ ,$$

d.h. $\displaystyle\lim_{\epsilon\searrow 0} \int_\epsilon^{t_0} dt\ t^{x-1}\, e^{-t}$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$. Für $t_0 < R < \infty$ gilt

$$0 \leq \int_{t_0}^{R} dt\ t^{x-1}\, e^{-t} \leq \int_{t_0}^{R} dt\ \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{t_0}^{R} \leq \frac{1}{t_0}\ .$$

Somit ist $\Gamma(x)$ konvergent.

i) partielle Integration liefert für $x > 0$

$$\int_\epsilon^R dt\ t^x\, e^{-t} = -t^x\, e^{-t}\Big|_\epsilon^R + \int_\epsilon^R dt\ \frac{d}{dt}(t^x)\, e^{-t} = -R^x\, e^{-R} + \epsilon^x\, e^{-\epsilon} + x\int_\epsilon^R dt\ t^{x-1}\, e^{-t}\ .$$

Die Behauptung folgt aus $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^x = 0$ für $x > 0$.

ii) Es gilt

$$\Gamma(1) = \lim_{\epsilon\searrow 0} \int_\epsilon^1 dt\ e^{-t} + \lim_{R\to\infty} \int_1^R dt\ e^{-t} = -\lim_{\epsilon\searrow 0} e^{-t}\Big|_\epsilon^1 - \lim_{R\to\infty} e^{-t}\Big|_1^R = \lim_{\epsilon\searrow 0} e^{-\epsilon} = 1\ .$$

□

Die Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ interpoliert damit die Fakultät. Eine andere Interpolation wird wie folgt erhalten: Für $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und beliebige $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$(x-1)! = \frac{(x+n)!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \Big(\frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+x}{n}\Big) .$$

Das bleibt auch im Limes $n \to \infty$ richtig. Im Limes werden die Brüche $\frac{n+p}{n}$ zu 1. Läßt man sie weg, dann kann man die so entstehende rechte Seite sogar für komplexe Zahlen $x \in \mathbb{C}$ definieren (mit $n^x = e^{x \ln n}$). Zweckmäßigerweise betrachtet man das Inverse:

$$G_n(z) := \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z} .$$

Satz 23.2 *Die Folge $(G_n)_{n\geq 1}$ konvergiert an jeder Stelle $z \in \mathbb{C}$. Ihre Grenzfunktion $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $G(z) := \lim_{n\to\infty} G_n(z)$ ist stetig und hat Nullstellen genau in den Punkten $0, -1, -2, \dots$. Es gilt*

i) $G(z+1) = \frac{1}{z} G(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}^*$

ii) $G(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad G(n) = \frac{1}{(n-1)!}$ *für alle* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Beweis. Für $z \in \{0, -1, -2, \dots\}$ konvergiert (G_n) gegen 0. Sei also $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, \dots, \}$ fest. Wähle $R, N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2R > 2|z|$. Dann ist $G_n(z) \neq 0$ für alle $2R \leq n \leq N$, und es gilt $G_N(z) = G_{2R-1}(z) \cdot \displaystyle\prod_{n=2R}^{N} \frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)}$. Die Quotienten sind $\dfrac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)} = \dfrac{z+n}{n} \cdot \Big(\dfrac{n-1}{n}\Big)^z = \Big(1+\dfrac{z}{n}\Big) e^{z \ln(1-\frac{1}{n})}$. Nach Satz 15.2 gilt $(1+\frac{z}{n}) = e^{L(\frac{z}{n})}$ für $|z| < n$ und damit

$$G_N(z) = G_{2R-1}(z) \cdot \exp\Big(\sum_{n=2R}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{n^k k} - z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k k} \Big)\Big) .$$

Die Summanden mit $k = 1$ heben sich gegeneinander auf, und wir erhalten für $n \geq 2R > 2|z|$ die Abschätzung

$$\Big| \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{n^k k} - z \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k k} \Big| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R^k}{n^k} + R \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \Big(\frac{R^2}{n^2} + \frac{R}{n^2}\Big) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{4R^2}{n^2} .$$

Somit ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2R}^{\infty} \ln \frac{G_n(z)}{G_{n-1}(z)}$ gleichmäßig konvergent auf $K_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, so daß die Grenzfunktion $\lim_{N\to\infty} G_N(z)$ existiert und stetig in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist.

i) folgt aus $G_n(z+1) = \frac{z+n+1}{nz} G_n(z)$ und Grenzwertbildung.
ii) folgt aus $G_n(1) = \frac{n+1}{n}$ und Grenzwertbildung. $\square$

Man definiert die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \to \mathbb{C}$ als $\Gamma(z) := \frac{1}{G(z)}$. Nach Satz 23.2 ist Γ stetig und nullstellenfrei auf dem Definitionsbereich, es gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ sowie $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zu zeigen ist allerdings, daß auf $\mathbb{R}_+^*$ die Integraldefinition aus Satz 23.1 mit $\frac{1}{G(z)}$ übereinstimmt. Der Beweis, den wir hier nicht angeben, beruht auf der Konvexität von $\ln \Gamma$.

Satz 23.3 *Es gilt* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *sowie* $\displaystyle\int_0^\infty dx\; e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *und* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty dx\; e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= (-x)\Gamma(x)\Gamma(-x) = (-x)\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{G_n(x)}\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{G_n(-x)}\Big) \\
&= (-x) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{G_n(x)G_n(-x)} \\
&= (-x) \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(0+x)(0-x)(1+x)(1-x)\cdots(n+x)(n-x)} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2-x^2} \;.
\end{aligned}$$

Mit dem Wallisschen Produkt $\prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2}$ aus Beispiel 20.8 gilt für $x = \frac{1}{2}$ die Gleichung $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$. Aus der Nullstellenfreiheit von Γ folgt dann $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Nach Substitution $t(x) = x^2$ mit $t' = 2x = 2\sqrt{t}$ erhält man

$$\int_\epsilon^R dx\; e^{-x^2} = \int_\epsilon^R dx\; e^{-t(x)} t'(x) \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2}^{R^2} dt\; t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} \;.$$

Für $\epsilon \searrow 0$ und $R \to \infty$ folgt die Behauptung. $\square$

Satz 23.4 (Stirlingsche Formel) *Für* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *gilt* $n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\mu(n)}$ *mit* $0 \leq \mu(n) \leq \frac{1}{12n}$. *(Wir zeigen nur* $0 \leq \mu(n) \leq \frac{1}{8n}$*.)*

Beweis. Nach Trapezregel (Satz 20.11) für $f(x) = \ln x$ und $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$ gilt

$$\int_k^{k+1} dx\; \ln x = \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) + \frac{1}{2} \int_k^{k+1} dx\; \frac{(x-k)(k+1-x)}{x^2}$$

für $k > 0$. Summieren über k von 1 bis $n-1$ ergibt

$$\int_1^n dx\; \ln x = \sum_{k=1}^n \ln k - \frac{1}{2} \ln n + \int_1^n dx\; \frac{\phi(x)}{x^2}$$

mit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $\phi(x) := \frac{1}{2}(x - [x])(1 + [x] - x)$, wobei $[x] \in \mathbb{N}$ der ganze Teil von $x \in \mathbb{R}_+$ ist. Wegen

$$\int_1^n dx\ \ln x \cdot 1 = x \ln x\Big|_1^n - \int_1^n dx\ 1 = n \ln n - n + 1 = 1 + \ln\Big(\frac{n}{e}\Big)^n$$

sowie $\sum_{k=1}^n \ln n = \ln(n!)$ gilt $\ln(n!) = \ln\Big(\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \sqrt{n} \cdot c_n\Big)$ mit

$$c_n := \exp\Big(1 - \int_1^n dx\ \frac{\phi(x)}{x^2}\Big) .$$

Da $0 \leq \phi \leq \frac{1}{8}$ eine beschränkte Funktion ist und das Integral $\displaystyle\int_1^\infty dx\ x^{-2}$ konvergent ist, existiert der Limes $c := \lim_{n\to\infty} c_n = \exp\Big(1 - \displaystyle\int_1^\infty dx\ \frac{\phi(x)}{x^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n}}$. Für den letzten Bruch ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{c_n^2}{c_{2n}} &= \frac{(n!)^2(2n/e)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!(n/e)^{2n}n} = \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \\
&= \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}\sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n)}{(2-1)(2+1) \cdot (4-1)(4+1) \cdots (2n-1)(2n+1)}} .
\end{aligned}$$

Im Limes $n \to \infty$ entsteht unter der letzten Wurzel das Wallissche Produkt (Beispiel 20.8) für $\frac{\pi}{2}$, d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2}{c_{2n}} = \sqrt{2\pi}$. Somit ist die Behauptung bewiesen mit

$$\mu(n) := \int_n^\infty dx\ \frac{\phi(x)}{x^2} .$$

Wegen $0 \leq \phi \leq \frac{1}{8}$ gilt $0 \leq \mu(n) \leq \frac{1}{8n}$, was sich unter Verwendung der Konvexität noch etwas verbessern läßt. □

Bemerkung: Man kann zeigen, daß die Stirlingsche Formel auch richtig bleibt für die Γ-Funktion, d.h. für $x > 0$ gilt $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\Big(\frac{x}{e}\Big)^x e^{\mu(x)}$ mit $0 \leq \mu(x) \leq \frac{1}{12x}$.

24 Taylor-Polynome und Taylor-Reihen

Nach Satz 16.4 liefern Funktionswert $f(x_0)$ und Ableitung $f'(x_0)$ einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ eine lineare Approximation der Funktion in der Nähe des Punktes x_0 mit Kontrolle des Fehlers. Die Taylorsche Formel beschreibt eine polynomiale Approximation der Funktion:

Satz 24.1 (Taylorsche Formel) *Es sei* $f : I \to \mathbb{C}$ *eine* $(n+1)$*-mal stetig differenzierbare Funktion und* $a \in I$*. Dann gilt für alle* $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \; .$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x dt\; (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \; .$$

Beweis. Durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Die Formel gilt für $n = 0$ auf Grund des Hauptsatzes des Differential- und Integralrechnung. Angenommen sie gilt bis einschließlich $n - 1 \geq 0$, dann ergibt partielle Integration des Restgliedes

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x dt\; (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) = -\frac{1}{n!}\int_a^x dt\; \Big(\frac{d}{dt}(x-t)^n\Big) f^{(n)}(t) \\ &= -\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_a^x + \frac{1}{n!}\int_a^x dt\; (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \; . \end{aligned}$$

□

Für eine mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion f heißt

$$(T_n f)(x;a) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

das Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f mit Entwicklungspunkt a, und $R_{n+1}(x)$ heißt das Restglied $(n+1)$-ter Ordnung. Für Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ stimmt wegen $f^{(k)}(0) = k! a_k$ das Taylor-Polynom N-ter Ordnung von f mit der bei N abgebrochenen Potenzreihe überein, d.h. $(T_N f)(x;0) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ für $|x| < R$. Für das Restglied gibt es verschiedene Formulierungen, z.B.

Satz 24.2 (Lagrangesche Form des Restgliedes) *Es sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine reellwertige Funktion, die ansonsten die Voraussetzungen von Satz 24.1 erfüllt. Dann gibt es ein* ξ *zwischen* a *und* x *mit*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \; .$$

Beweis. Man wende den Mittelwertsatz der Integralrechnung auf $R_{n+1}(x)$ an. □

Damit liefert die Taylorsche Formel Fehlerabschätzungen der folgenden Art:

Beispiel 24.3 Für $f(x) = \sin x$ gilt $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ und $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$, d.h. $|f^{(n)}(\xi)| \leq 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Unter Verwendung der Sinus-Reihe gilt somit für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\Big|\sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \;.$$

Satz 24.4 (hinreichendes Kriterium für lokale Extrema) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. In einem inneren Punkt $a \in I$ gelte $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$, aber $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Dann hat f im Punkt a*

i) *ein strenges lokales Minimum, falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(a) > 0$;*

ii) *ein strenges lokales Maximum, falls n ungerade ist und $f^{(n+1)}(a) < 0$;*

iii) *kein lokales Extremum, falls n gerade ist.*

Beweis. Einsetzen der Voraussetzungen in die Taylorsche Formel mit Lagrangeschen Restglied ergibt $f(x) = f(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ für ein ξ zwischen x und a. Wegen der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ gibt es nach Satz 12.8.ii) eine Umgebung $U \subset I$ von a, in der $f^{(n+1)}(\xi)$ das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n+1)}(a)$ hat. Ist $n+1$ gerade und $f^{(n+1)}(a) > 0$, so folgt $f(x) > f(a)$ für alle $x \in U \setminus \{a\}$, d.h. f hat in a ein strenges lokales Minimum. Analog für ii). Ist dagegen $n+1$ ungerade und z.B. $f^{(n+1)}(a) > 0$, so folgt $f(x) < f(a)$ für $x < a$ und $f(x) > f(a)$ für $x > a$, d.h. f hat in a kein lokales Extremum. □

Satz 24.5 *Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann gibt es eine stetige Funktion $r : I \to \mathbb{C}$ mit $r(a) = 0$ und $f(x) = (T_n f)(x;a) + (x-a)^n r(x)$.*

Beweis. Stetigkeit von r in $x \neq 0$ folgt aus der Definition, so daß nur $\lim_{x\to a} r(x) = 0$ zu zeigen ist. Nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil genügt der Beweis für reellwertige Funktionen. Mit der Lagrangeschen Form des Restgliedes gilt

$$\big(f(x) - (T_{n-1}f)(x;a)\big) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

für ein ξ zwischen x und a, d.h. $r(x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi) - f^n(a)}{n!}$ für $x \neq a$. Mit $x \to a$ geht auch $\xi \to a$, so daß aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ folgt $\lim_{x\to a} r(x) = 0$. □

Für diese Eigenschaft ist das Landau-Symbol "o" gebräuchlich, $f(x) = (T_n f)(x;a) + o\big((x-a)^n\big)$. Darunter versteht man

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \;.$$

Definition 24.6 Es sei $f : I \to \mathbb{C}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Die Potenzreihe $(Tf)(x;a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ heißt die *Taylor-Reihe* von f im Punkt $a \in I$. Konvergiert $(Tf)(x;a)$ gegen $f(x)$ für alle x aus einer Umgebung $U \subset I$ von a, so sagt man: f besitzt in U eine *Taylor-Entwicklung* um a.

Warnung: Die Taylor-Reihe ist ein formaler Ausdruck! Während die Taylorsche Formel mit Restglied exakt gilt, muß die Taylor-Reihe für $x \neq a$ nicht konvergieren (der Konvergenzradius ist dann 0), und selbst wenn die Taylor-Reihe konvergiert, muß $(Tf)(x;a)$ nicht gleich $f(x)$ sein!

Beispiel 24.7 Wir erinnern an die schon in Abschnitt 18 eingeführte Einschaltfunktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Die Ableitungen in $x > 0$ sind von der Form $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}})$ für ein Polynom P_n vom Grad $2n$ in $\frac{1}{x}$, denn nach Produkt- und Kettenregel ist

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(P_n(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}\Big)' = \Big(-P_n'(\tfrac{1}{x})\frac{1}{x^2} + P_n(\tfrac{1}{x})\frac{1}{x^2}\Big)e^{-\frac{1}{x}} .$$

Dabei ist die Ableitung P' des Polynoms ein Polynom $(2n-1)$-ter Ordnung. Somit ist $\lim_{x\searrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich $(Tf)(x;0) = 0 \neq f(x)$.

Ist eine Funktion f durch eine Potenzreihe darstellbar, so stimmt die Taylor-Reihe (innerhalb des Konvergenzkreises) mit f überein. Insbesondere lassen sich die im Laufe des Semesters hergeleiteten Potenzreihen reproduzieren:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} , && x \in \mathbb{R} , \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} , && x \in \mathbb{R} , \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} , && x \in \mathbb{R} , \\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} , && x \in \mathbb{R} , \\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} , && x \in \mathbb{R} , \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k , && x \in \mathbb{R} \text{ für } \alpha \in \mathbb{N} , \quad x \in \,]-1,1[\, \text{ für } \alpha \in \mathbb{C} ,
\end{aligned}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\,, \qquad x \in\,]-1,1]\,,$$
$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k+1}}{2k+1}\,, \qquad x \in [-1,1]\,,$$

Zu beachten ist, daß einige dieser Potenzreihen sogar für komplexe Zahlen $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gelten, während wir die Differentiation nur im Reellen eingeführt hatten.

Beispiel 24.8 (Reihe des Arcus sinus) Unter Verwendung der Binomialreihe und Vertauschbarkeit von Integration und Reihe nach Satz 22.7 gilt für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x dt\; (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^x dt\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k t^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.\end{aligned}$$

25 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Unter einer gewönlichen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung zwischen einer Funktion y, ihren Ableitungen $y', y'', \dots y^{(n)}$ und der Variablen x. Viele Probleme der Physik lassen sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben. Beispiele sind eindimensionale Bewegungen in der Mechanik, die durch das Newtonsche Gesetz

$$y''(x) = F(x, y(x), y'(x))$$

beschrieben werden. Dabei ist x die Zeit, $y(x)$ der Ort, $y'(x)$ die Geschwindigkeit, $y''(x)$ die Beschleunigung und F die Kraft. Gesucht ist die *Bahnkurve* $y(x)$. Man möchte wissen, unter welchen Bedingungen die Bahnkurve existiert und durch welche Bedingungen die Bahnkurve eindeutig bestimmt ist. Ein weiteres Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist der radioaktive Zerfall, beschrieben durch $y'(x) = -\lambda y(x)$. Dabei ist wieder x die Zeit, y die Zahl der Teilchen und y' die Zerfallsrate. Ein ähnliches Gesetz $y'(x) = \lambda y$ beschreibt auch das anfängliche Wachstum von Bakterienpopulationen.

Wir werden hier nur einen kurzen Einblick in die Lösungsmethode für einen besonders einfachen Typ von Differentialgleichungen geben. Die allgemeine Lösungstheorie folgt im 3. Semester.

Definition 25.1 (DGL 1. Ordnung mit getrennten Variablen) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Dann heißt

$$y'(x) = f(x)\, g(y)$$

Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Formell können wir diese Differentialgleichung als

$$\frac{dy}{g(y)} = dx\, f(x)$$

schreiben und beide Seiten getrennt integrieren, wobei gewisse *Anfangsbedingungen* ins Spiel kommen.

Satz 25.2 *Zu gegebenem Anfangspunkt* $(x_0, y_0) \in I \times J$ *definieren wir Funktionen* $F : I \to \mathbb{R}$ *und* $G : J \to \mathbb{R}$ *durch*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} dt\ f(t)\ , \qquad G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}\ .$$

Ist $I' \subset I$ *ein Intervall mit* $F(I') \subset G(J)$*, dann gibt es genau eine Lösung* $y : I' \to \mathbb{R}$ *der Differentialgleichung* $y' = f(x)\, g(y)$ *mit der Anfangsbedingung* $y(x_0) = y_0$*. Diese Lösung erfüllt die Gleichung*

$$G(y(x)) = F(x) \qquad \textit{für alle } x \in I'\ .$$

Beweis. Angenommen, $y(x)$ ist eine Lösung des Problems, d.h. es gilt $y'(x) = f(x)\, g(y(x))$ und $y(x_0) = x_0$. Wir setzen $x \mapsto t$ und integrieren über t von x_0 nach x:

$$\int_{x_0}^{x} dt\ \frac{y'(t)}{g(y(t))} = \int_{x_0}^{x} dt\ f(t)\ .$$

Nach Substitution $s = y(t)$ ergibt sich

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} dt\ f(t)\ ,$$

also $G(y(x)) = F(x)$. Zu beachten ist, daß wir die Zulässigkeit der Substitution $s = y(t)$ nicht prüfen! Das wird nun nachgeholt.

Wir nehmen die Gültigkeit von $G(y(x)) = F(x)$ an. Wegen $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ für alle $y \in J$ ist G streng monoton (und stetig differenzierbar), so daß die eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $G^{-1} : G(J) \to \mathbb{R}$ existiert und nach Satz 16.10 stetig differenzierbar ist. Somit gilt $y(x) = G^{-1}(F(x))$ für alle $x \in I'$, d.h. im Fall der Existenz ist die Lösung eindeutig. Für $Y := G^{-1} \circ F : I' \to \mathbb{R}$ gilt mit Kettenregel und Satz 16.10

$$Y'(x) = (G^{-1})'(F(x)) \cdot F'(x) = \frac{1}{G'(G^{-1}(F(x)))} \cdot F'(x) = g(Y(x)) \cdot f(x)\ ,$$

d.h. Y erfüllt die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $Y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$. Also existiert eine Lösung. □

Beispiel 25.3 Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = e^y \sin x$ zu beliebigem Anfangspunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist $F(x) = \cos x_0 - \cos x$ und $G(y) = e^{-y_0} - e^{-y}$, also

$$e^{-y(x)} = \cos x - \cos x_0 + e^{-y_0} .$$

Wegen $e^{-y_0} > 0$ gibt es ein offenes Intervall $I' \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I'$, so daß $\cos x - \cos x_0 + e^{-y_0} > 0$ für alle $x \in I'$. Dann ergibt sich die Lösung zu $y = -\ln\big(\cos x - \cos x_0 + e^{-y_0}\big)$ für alle $x \in I'$.

Definition 25.4 (lineare Differentialgleichung 1. Ordnung) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$$

eine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. Diese heißt für $b = 0$ *homogen*, sonst *inhomogen*.

Satz 25.5 *Es sei $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = a(x)y$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, nämlich*

$$y(x) = y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^{x} dt\; a(t)\Big) .$$

Beweis. Es handelts sich um einen Spezialfall einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen. □

Der inhomogene Fall wird durch *Variation der Konstanten* gelöst. Darunter versteht man den Ansatz $y(x) = \tilde{y}(x)u(x)$, wobei $\tilde{y}(x)$ die homogene Gleichung $\tilde{y}' = a(x)\tilde{y}$ mit $\tilde{y}(x_0) = 1$ löst. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} y'(x) &= \tilde{y}'(x)\, u(x) + \tilde{y}(x)\, u'(x) = \big(a(x)\, u(x) + u'(x)\big)\tilde{y}(x) \\ &= a(x)\, u(x)\, \tilde{y}(x) + b(x) , \end{aligned}$$

also $u'\tilde{y}(x) = b(x)$ mit Anfangsbedingung $u(x_0) = y_0$. Das ist wieder eine spezielle Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit der eindeutigen Lösung

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} dt\; \frac{b(t)}{\tilde{y}(t)} .$$

Somit ist bewiesen:

Satz 25.6 *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sowie $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, nämlich*

$$y(x) = \tilde{y}(x)\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} dt\; \frac{b(t)}{\tilde{y}(t)}\Big) \qquad \textit{mit} \qquad \tilde{y}(s) = \exp\Big(\int_{x_0}^{s} dt\; a(t)\Big) .$$

Beispiel 25.7 Betrachtet werde die Differentialgleichung $y' = 2xy + x$ mit $y(0) = c$. Dann hat die homogene Gleichung $\tilde{y}' = 2x\tilde{y}$ mit $\tilde{y}(0) = 1$ die Lösung

$$\tilde{y}(x) = \exp\Big(\int_0^x dt\; 2t\Big) = e^{x^2}\;.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{x^2}\Big(c + \int_0^x dt\; te^{-t^2}\Big) = e^{x^2}\Big(c + \frac{1}{2}\Big(1 - e^{-x^2}\Big)\Big) \\ &= \frac{2c+1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}\;. \end{aligned}$$

Beispiel 25.8 (Freier Fall mit Reibung) Es sei x die Zeit. Der freie Fall eines Massenpunktes (in y-z-Ebene) wird bei geschwindigkeitsproportionaler Reibungskraft beschrieben durch die Differentialgleichungen

$$mz'' = -mg - rz'\;, \qquad my'' = -ry'\;.$$

Als Anfangsbedingung sei $z'(0) = v_z$ und $y'(0) = v_y$ gegeben. Damit ergeben sich die Geschwindigkeiten zu

$$\begin{aligned} y'(x) &= v_y \exp\Big(\int_0^x dt\; (-\frac{r}{m})\Big) = v_y e^{-\frac{r}{m}x}\;, \\ z'(x) &= e^{-\frac{r}{m}x}\Big(v_z - \int_0^x dt\; g e^{\frac{r}{m}t}\Big) = v_z e^{-\frac{r}{m}x} - \frac{mg}{r}(1 - e^{-\frac{r}{m}x})\;. \end{aligned}$$

Für $x \to \infty$ fällt der Massenpunkt also mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{mg}{r}$ in negative z-Richtung. Die Anfangsgeschwindigkeiten sind exponentiell gedämpft.

Beide Lösungen sind selbst Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Sind die Anfangsbedingungen $z(0) = h$ und $y(0) = 0$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x dt\; v_y e^{-\frac{r}{m}t} = \frac{v_y m}{r}\Big(1 - e^{-\frac{r}{m}x}\Big)\;, \\ z(x) &= h + \int_0^x dt\Big(v_z e^{-\frac{r}{m}t} - \frac{mg}{r}(1 - e^{-\frac{r}{m}t})\Big) \\ &= h + \frac{v_z m}{r}\Big(1 - e^{-\frac{r}{m}x}\Big) - \frac{mg}{r}\Big(x - \frac{m}{r}(1 - e^{-\frac{r}{m}x})\Big)\;. \end{aligned}$$