Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

WS 2005/06

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"

(Differentiation, differenzierbare Mannigfaltigkeiten)

Abgabe der Lösung bis Montag, 7.11.2005, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

7. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0 \\ \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Richtungsableitungen in Richtung $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ im Punkt $(0, 0)$ und im Punkt $(2, 1)$. Ist f in diesen Punkten differenzierbar?

8. Aufgabe (4 Punkte)

Beweisen Sie, daß für differenzierbare Abbildungen $g : U \to V$ und $f : V \to W$, mit offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und $W \subset \mathbb{R}^k$, das Differential der zusammengesetzten Abbildung durch

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x)$$

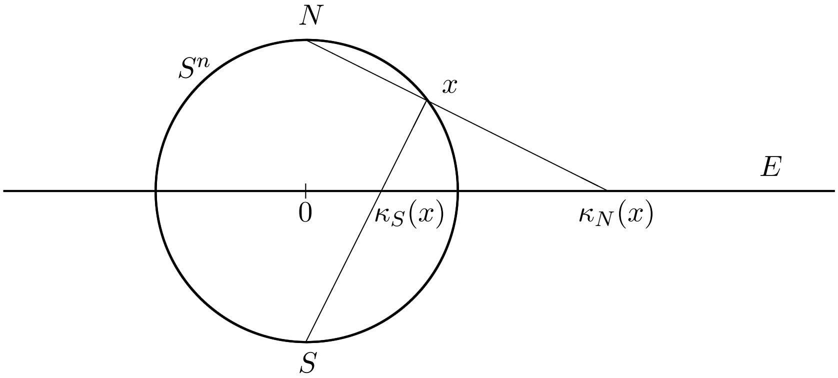
gegeben ist. Wie sieht die Superposition in kanonischen Basen aus?

9. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ die n-dimensionale Sphäre mit Nordpol $N = (0, \ldots, 0, 1)$ und Südpol $S = (0, \ldots, 0, -1)$. Seien $U_N = S^n \setminus \{N\}$ und $U_S = S^n \setminus \{S\}$ Umgebungen des Süd- und Nordpols. Sei $E = \{(x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}\} \simeq \mathbb{R}^n$ die n-dimensionale Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$.

Sei $\kappa_N : U_N \to \mathbb{R}^n$ die stereographishe Projektion vom Nordpol, die jedem $x \in U_N$ den Schnittpunkt von E mit der durch N und x gehenden Geraden zuordnet. Sei $\kappa_S : U_S \to \mathbb{R}^n$ die stereographishe Projektion vom Südpol, die jedem $x \in U_S$ den Schnittpunkt von E

mit der durch S und x gehenden Geraden zuordnet.



Geben Sie die Funktionen κ_N, κ_S explizit an und beweisen Sie, daß $\kappa_S \circ \kappa_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist, so daß S^n eine Mannigfaltigkeit mit einem aus den Karten (U_N, κ_N) und (U_S, κ_S) bestehenden Atlas wird.

10. Aufgabe (4 Punkte)

Diskutieren Sie den n-Torus $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ als Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+k}$, d.h. geben Sie für eine geeignete Kodimension k und eine geeignete offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^k$ an, die T^n zu einer Untermannigfaltigkeit macht.