Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt WS 2005/06

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Zusammenhang im komplexen Hopf-Bündel, magnetische Monopole)

Abgabe der Lösung bis Montag, 23.1.2006, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

41. Aufgabe (5 Punkte)

Betrachted werde das komplexe Hopf-Bündel aus Aufgabe 34. Für die Bündelmannigfaltigkeit $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ realisiert durch $p = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2\ ,\ |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ werde die kanonische Zusammenhangsform durch $\omega_{(a,b)} = \bar{a}da + \bar{b}db$ definiert. Beweisen Sie, daß ω tatsächlich eine Zusammenhangsform ist und berechnen Sie die Krümmungsform Ω in p.

42. Aufgabe (8 Punkte)

Die Umgebungen U_N und U_S des Südpols bzw. des Nordpols der S^2 werden mittels Kugelkoordinaten auf Gebiete $B_S = \kappa_S(U_S) = [0,2\pi) \times [0,\pi) \ni (\phi,\theta)$ und $B_N = \kappa_N(U_N) = [0,2\pi) \times (0,\pi] \ni (\phi,\theta)$ abgebildet. Diese Kartenabbildungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \kappa_S^{-1} &: B_S \ni (\phi,\theta) \mapsto (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \in U_S\ , \\ \kappa_N^{-1} &: B_N \ni (\phi,\theta) \mapsto (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \in U_N\ . \end{aligned}$$

Berechnen Sie die auf B_S und B_N zurückgezogenen lokalen Eichpotentiale $(\kappa_S^{-1})^*\mathcal{A}_S$ und $(\kappa_N^{-1})^*\mathcal{A}_N$ sowie die lokalen Feldstärken $(\kappa_S^{-1})^*\mathcal{F}_S$ und $(\kappa_N^{-1})^*\mathcal{F}_N$ für die in Aufgabe 34 bestimmte Trivialisierung

$$\begin{aligned} \chi_S &: \pi^{-1}(U_S) \ni (a,b) \mapsto \Big((\bar{a}b + \bar{b}a, \mathrm{i}\bar{a}b - \mathrm{i}\bar{b}a, 2\bar{a}a - 1), \frac{a}{|a|} \Big) \in U_S \times U(1)\ , \\ \chi_N &: \pi^{-1}(U_N) \ni (a,b) \mapsto \Big((\bar{a}b + \bar{b}a, \mathrm{i}\bar{a}b - \mathrm{i}\bar{b}a, 1 - 2\bar{b}b), \frac{b}{|b|} \Big) \in U_N \times U(1)\ . \end{aligned}$$

43. Aufgabe (2 Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ die lokale Feldstärke für einen Zusammenhang in einem Hauptfaserbündel über der Basismannigfaltigkeit $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \ni (t,x,y,z)$ mit Strukturgruppe $G = U(1)$. Da die Lie-Algebra von $U(1)$ mit $\mathrm{i}\mathbb{R}$ identifiziert werden kann, schreiben wir $\mathcal{F}_{(t,x,y,z)} = \mathrm{i}E_{(x,y,z)}(t) \wedge dt + \mathrm{i}B_{(x,y,z)}(t)$, wobei $E(t)$ eine 1-Form auf $\mathbb{R}^3$ ("elektrisches Feld") ist und $B(t)$ eine 2-Form auf $\mathbb{R}^3$ ("Magnetfeld") ist. Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 33, daß $d\mathcal{F} = 0$ den beiden Maxwellschen Gleichungen entspricht, in denen ρ und $\vec{j}$ nicht vorkommen.

44. Aufgabe (5 Punkte)

Das Hopf-Bündel werde um zwei Dimensionen erweitert zur Bündelmannigfaltigkeit $\mathbb{R} \times S^3 \times \mathbb{R}^+$. Dabei wird $\mathbb{R}^+$ als Radius betrachtet in der Identifikation $S^3 \times \mathbb{R}^+ \simeq \mathbb{R}^4$. Die Gruppe $U(1)$ wirkt nur auf den S^3-Anteil und führt zur Basismannigfaltigkeit $\mathbb{R} \times S^2 \times \mathbb{R}^+ \ni (t, x, y, z)$. Dabei wird $\mathbb{R} \ni t$ mit der Zeitachse identifiziert und $\mathbb{R}^+$ wieder mit dem Radius.

Zeigen Sie under Verwendung der Aufgaben 42 und 43, daß die lokale Feldstärke nur einen Magnetfeldanteil hat, d.h. $\mathcal{F} = \mathrm{i}B$. Zeigen Sie, daß dieses Magnetfeld durch einen magnetischen Monopol im Punkt $(t, 0, 0, 0)$ hervorgerufen wird und berechnen Sie seine magnetische Ladung. Hinweis: Die magnetische Ladungsdichte eines magnetischen Monopols der magnetischen Ladung Q_m im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist (in Formen-Schreibweise)

$$\rho_M(x, y, z) = Q_m \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) dx \wedge dy \wedge dz \,,$$

wobei δ die Dirac-Distribution ist. Unter Berücksichtigung von magnetischen Monopolen schreibt sich die Maxwellsche Gleichung als $dB = \rho_M$.