Die Lagrangesche Inversionsformel

Raimar Wulkenhaar
Mathematisches Institut der WWU

Ringvorlesung, 2.6.2021

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

- zunächst Turin, dann 1766–1787 Nachfolger von Leonhard Euler in Berlin, schließlich Paris
- Begründer der Variationsrechnung (Euler-Lagrange-Gleichungen)
- Lagrangesche Mechanik, Lagrange-Funktion
- Dreikörperproblem (Lagrange-Punkte)
- Lagrange-Multiplikator
- Lagrangesche Untermannigfaltigkeit
- Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadraten
- Inversionsformel (diese Vorlesung)
- Interpolationsformel: Polynom durch n Punkte
- metrisches Einheitensystem

NOUVELLE MÉTHODE

POUR

RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS LITTÉRALES

PAR LE MOYEN DES SÉRIES (*).

(*Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, t. XXIV, 1770.)

Je vais donner dans ce Mémoire une méthode très-simple et très-générale pour réduire les racines des équations littérales en suites infinies, matière sur laquelle plusieurs Géomètres se sont déjà exercés.

Ma méthode a, si je ne me trompe, de grands avantages sur toutes les méthodes connues pour le même objet :

1° Elle donne l'expression de chaque racine de l'équation proposée, au lieu que les autres méthodes ne donnent ordinairement que l'expression d'une seule racine ;

2° Elle donne les racines cherchées par des séries régulières, c'est-à-dire telles, que leurs termes suivent une loi générale et connue, de sorte qu'il est très-facile de les continuer autant que l'on veut ;

3° Ces séries sont de plus telles, qu'on peut aisément trouver la forme de leurs derniers termes, et en déduire les conditions qui les rendent convergentes ou divergentes ;

4° On peut aussi par la même méthode avoir l'expression d'une puis-

(*) Lu à l'Académie le 18 janvier et le 5 avril 1770.

Die Lagrangesche Inversionsformel liefert die Taylor-Reihe der Umkehrfunktion einer Potenzreihe oder analytischen Funktion. Sie ist eines der wichtigsten Werkzeuge der Kombinatorik

1 Formale Potenzreihen

Eine formale Potenzreihe in x ist ein Ausdruck $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ mit $f_n \in \mathbb{C}$. Die Konvergenz dieser Reihe wird nicht betrachtet.

- Formale Potenzreihen bilden einen Ring $\mathbb{C}[[x]]$ mit
  - Addition $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) x^n$
  - Multiplikation $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$ mit $\displaystyle h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$.
- Ist $f_0 \neq 0$, dann hat $\displaystyle f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ ein formales Reziprokes $g = \frac{1}{f}$ mit g_k bestimmt aus $h_n = \delta_{n0}$.
- Mit $[x^k]f(x) = f_k$ falls $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ bezeichnen wir die Projektion auf den k-ten Koeffizienten.

$$[x^k]\, f(x) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \Big|_{x=0}$$

2 Formale Laurent-Reihen

Eine formale Laurentreihe ist ein Ausdruck $\phi(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $n_0 \in \mathbb{Z}$. Die Konvergenz dieser Reihe wird nicht betrachtet.

- Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}((x))$ die Menge der formalen Laurentreihen. Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}((x))$ wird wie bei Potenzreihen erklärt.
- Es ist nicht schwer zu sehen, daß jede von Null verschiedene formale Laurentreihe $0 \neq \phi \in \mathbb{C}((x))$ ein Reziprokes $\frac{1}{\phi} \in \mathbb{C}((x))$ besitzt. Damit ist $\mathbb{C}((x))$ ein Körper.
- Wie bei Potenzreihen bezeichnen wir mit $[x^n]\phi(x) = a_n$ falls $\phi(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ die Projektion auf den Koeffizienten von x^n. Hier ist $n \in \mathbb{Z}$.
- Der Koeffizient
$$\operatorname*{res}_x \phi(x) := [x^{-1}]\phi(x) = a_{-1}$$
heißt das Residuum von ϕ. Das Residuum ist von zentraler Bedeutung in der Theorie der Laurentreihen.
- Offenbar gilt
$$\operatorname*{res}_x \frac{d}{dx}\phi(x) = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathbb{C}((x)) \,. \tag{1}$$

3 Komposition von Potenz- und Laurenreihen

Sei $\phi(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}((z))$ eine Laurent-Reihe und $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^k$ eine Potenzreihe ohne konstanten Term, dann ist folgende Komposition erklärt:

$$\phi(f(x)) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (f(x))^n \in \mathbb{C}((x)) .$$

- Ist $\phi = g \in \mathbb{C}[[z]]$ eine Potenzreihe, dann sind die Koeffizienten von $g \circ f$ aus der Formel von Faà di Bruno zu gewinnen:

$$\frac{d^n}{dx^n}(g \circ f)(x) = \sum_{k=0}^{b} g^{(k)}(f(x)) B_{n,k}(f'(x), f''(x), ..., f^{(n-k+1)}(x)) . \qquad (2)$$

  Hier sind $B_{n,k}$ die Bell-Polynome. Diese Formel ist die Verallgemeinerung der Kettenregel auf höhere Ableitungen.

- Sind $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ und $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^k$, dann übersetzt sich die Formel von Faà di Bruno in

$$[x^n](g \circ f)(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k! g_k B_{n,k}(1! f_1, 2! f_2, ..., (n-k+1)! f_{n-k+1})$$

4 Die Umkehrfunktion einer formalen Potenzreihe

Ist $f_1 \neq 0$, dann kann man nach der Umkehrfunktion von f fragen, einer formalen Potenzreihe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$ mit

$$g(f(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n (f(x))^n = x \; . \tag{3}$$

- Die g_n ergeben sich schrittweise durch Koeffizientenvergleich:

$$g_1 f_1 = 1 \; , \; \sum_{k=0}^{n} k! g_k B_{n,k}(1! f_1, 2! f_2, ..., (n-k+1)! f_{n-k+1}) = 0 \text{ für alle } n \geq 2 \; .$$

- Insbesondere existiert die Umkehrfunktion g, und sie ist eindeutig bestimmt.
- Nochmalige Komposition mit f führt zu

$$f(g(f(x)) = f(x) \qquad \text{oder} \quad f(g(z)) = z \; .$$

5 Die Lagrangesche Inversionsformel

Die Umkehrfunktion ist durch Koeffizientenvergleich nur sehr mühsam zu gewinnen. Die **Lagrangesche Inversionsformel** gibt eine extrem strukturierte Formel für den Koeffizienten g_n.

- Die Formel wird transparenter, wenn wir $f \in x\mathbb{C}[[x]]$ durch das Reziproke ausdrücken, $f(x) = \frac{x}{r(x)}$ mit $r \in \mathbb{C}[[x]]$.
- Wir suchen die Lösung $g \in \mathbb{C}[[z]]$ der Gleichung

$$\frac{g(z)}{r(g(z))} = z \quad \text{für gegebene Potenzreihe } r \in \mathbb{C}[[x]] \,. \tag{4}$$

mit $r_0 \neq 0$

Theorem 1 (Bürmann 1799) *Sei $r \in \mathbb{C}[[x]]$ eine beliebige formale Potenzreihe. Dann gibt es genau eine formale Potenzreihe $g \in \mathbb{C}[[z]]$ mit $g(z) = z \cdot r(g(z))$.*

(a) *Ist $\phi \in \mathbb{C}((x))$ eine formale Laurentreihe, dann gilt*

$$[z^n]\phi(g(z)) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\big(\phi'(x)(r(x))^n\big) \,, \qquad n \neq 0 \,. \tag{5}$$

(b) *Insbesondere wird für $\phi(x) = x$ die Lagrangesche Inversionsformel erhalten:* $(1 \neq 0)$

$$[z^n]g(z) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\big((r(x))^n\big) \,, \qquad n > 0 \,. \tag{6}$$

Die Transformationsformel

Lemma 2 (Jacobi) *Sei* $\phi \in \mathbb{C}((z))$ *eine formale Laurenreihe und* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ *eine formale Potenzreihe mit* $[x]f(x) = f_1 \neq 0$. *Dann gilt die Transformationsformel*

$$\operatorname*{res}_z \phi(z) = \operatorname*{res}_x \phi(f(x))f'(x) \tag{7}$$

Beweis. $\varphi(z) = z^k$ genügt. (1) $k \neq -1$, $\operatorname*{res}_z z^k = 0$

$$\operatorname*{res}_x (f(x))^k f'(x) = \operatorname*{res}_x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k+1}(f(x))^{k+1}\right) = 0$$

(2) $k = -1$ $\qquad \operatorname*{res}_z z^{-1} = 1$

$$\operatorname*{res}_x \frac{f'(x)}{f(x)} = \operatorname*{res}_x \frac{f_1 + 2f_2 x + 3f_3 x^2 + \cdots}{f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots} = \operatorname*{res}_x \frac{1}{x}\left(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots\right)$$

$= 1$ $\qquad f_1 \neq 0$

$\square$

Beweis von Theorem 1

$$[z^n]\,\varphi(g(z)) = \operatorname*{res}_z \frac{\varphi(g(z))}{z^{n+1}} \overset{\text{Lemma 2 für } \varphi\circ g}{=} \operatorname*{res}_x \frac{\varphi(g(f(x)))\, f'(x)}{(f(x))^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{Wähle } g(f(x)) = x}$$

$$f(x) = \frac{x}{r(x)}$$

$$= \operatorname*{res}_x \frac{\varphi(x)\, f'(x)}{(f(x))^{n+1}}$$

$$= \cancelto{0}{\operatorname*{res}_x \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{n}\frac{\varphi(x)}{(f(x))^n}\right]} + \operatorname*{res}_x \frac{1}{n}\frac{\varphi'(x)}{(f(x))^n}$$

$$= \operatorname*{res}_x \left(\frac{1}{x}\,\varphi'(x)\,(r(x))^n / x^n\right) = [x^{n-1}]\left(\varphi'(x)\,(r(x))^n\right)$$

6 Konvergenz der Reihen

Mit Methoden aus der Funktionentheorie läßt sich zeigen (was wir aber nicht tun), daß die Lagrangesche Inversionsformel bei konvergenten Reihen richtig bleibt.

Theorem 3 *Ist $r(x)$ eine Potenzreihe mit $r(0) \neq 0$ und Konvergenzradius $R > 0$, dann ist die Umkehrfunktion g der Funktion $\frac{x}{r(x)}$ in einer Umgebung von 0 in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar, und für diese gilt*

(a) *die Formel von Lagrange*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \lim_{w \to 0} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} (r(w))^n \tag{8}$$

(b) *die Formel von Bürmann*

$$h(g(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \lim_{w \to 0} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \left(h'(w)(r(w))^n\right) \tag{9}$$

für eine in einer Umgebung von 0 in eine konvergente Potenzreihe entwickelbare Funktion h mit $h(0) = 0$.

7 Lösung algebraischer Gleichungen

Lagrange ging es 1770 um die Lösung algebraischer Gleichungen wie $x^p + x = 1$. Die Lösungsformeln für $p = 3$ und $p = 4$ wurden von Cardano und Ferrari im 16. Jahrhundert gefunden. Der Fall $p \geq 5$ war ein offenes Problem und wurde erst später von Ruffini (1799), Abel (1824) und Galois (1830) geklärt.

Beispiel 4 *Die Gleichung $x^p + x = z$ ist mit $x = g(z)$ äquivalent zu*

$z \in \mathbb{R}$

$$g(z) = \frac{z}{(g(z))^{p-1} + 1} =: z \cdot r(g(z)) \, .$$

$p \geq 5, \ldots$

$r(x) = \frac{1}{1 + x^{p-1}}$

- *Nach der Lagrangeschen Formel ist also*

$$[z^n]g(z) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]\left(\frac{1}{1 + x^{p-1}}\right)^n$$
$$= \frac{1}{n}[x^{n-1}] \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^{k(p-1)}$$

- *Es gilt* $\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n-1+k}{k}$.

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$\parallel$

Binomialreihe $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$

- *Der Koeffizient g_n ist nur ungleich Null, wenn $n-1=k(p-1)$ ist für ein $k\in\mathbb{N}$, und dann gegeben durch*

$$g_{k(p-1)+1} = \frac{(-1)^k}{k(p-1)+1}\binom{kp}{k}$$

- *Es folgt*

$$x = g(z) = z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(p-1)+1}\binom{kp}{k}z^{k(p-1)} \tag{10}$$

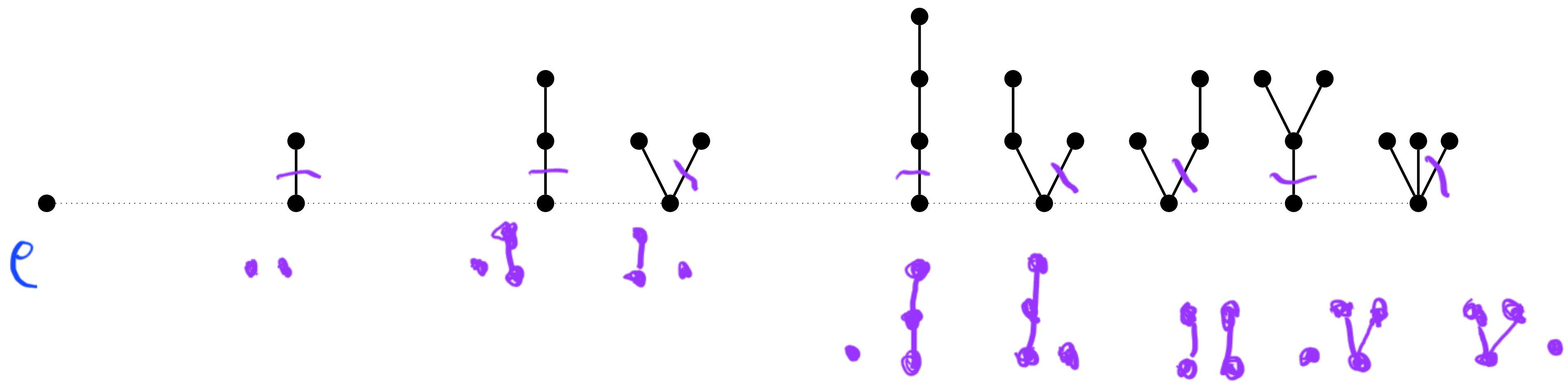
- *Die Reihe konvergiert sogar in einer Umgebung von $z=0$ mit Konvergenzradius $\frac{(p-1)}{\sqrt[p-1]{p^p}}$.*

- *Mit der Gaußschen Multiplikationsformel für die Γ-Funktion läßt sich $\binom{kp}{k}$ durch Verhältnisse von $\Gamma(k+a)$ darstellen. Dadurch laßt sich $x=g(z)$ als hypergeometrische Funktion ${}_{p-1}F_{p-2}$ schreiben, die damit $g(z)$ über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzt.*

8 Die Zahl planarer gewurzelter Bäume

Ein gewurzelter Baum ist ein zusammenhängender Graph (bestehend aus Knoten und Kanten) ohne Zykel, in dem es einen ausgezeichneten Knoten (die Wurzel) gibt, von dem aus ein gerichteter Weg in jeden anderen Knoten führt. Wir betrachten planare Bäume, die in der Ebene eingebettet sind.

Beispiel 5 *Hier sind alle planaren gewurzelten Bäume mit* ≤ 4 *Knoten:*



- Sei c_n die Zahl der planaren gewurzelten Bäume mit n Kanten (also $n+1$ Knoten). Offenbar ist $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$.

- Um die c_n zu bestimmen, führen für die erzeugende Funktion $C(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n$ ein, die als formale Potenzreihe zu verstehen ist.

Gleichung für die erzeugende Funktion $C(X)$

Sei M die Menge aller Bäume und e der Baum aus nur einem Knoten.

- In einem Baum mit mindestens einer Kante zerschneiden wir die am weitesten rechts gelegene Kante über der Wurzel.
- Der Baum zerfällt in zwei Teile. Ein Teil bleibt ein gewurzelter (und gepflanzter) Baum. Der abgeschnittene Ast ist selbst wieder ein Baum, wenn wir den Knoten direkt an der Schnittstelle als neue Wurzel nehmen.
- Auf diese Weise einsteht eine Bijektion zwischen der Menge $M \setminus e$ und der Menge $M \times M$.
- Für die erzeugende Funktion der Bäume gilt somit die Gleichung

$$C(x) - x = C(x) \cdot C(x) \ . \tag{11}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung (11) ist offenbar $C(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$, wobei wir das negative Vorzeichen nehmen müssen, um $C(0) = 0$ zu garantieren. Somit gilt

$$c_n = [x^{n+1}]\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}) \ .$$

Catalan-Zahlen

- Alternativ kann man c_n auch über die Lagrangesche Inversionsformel gewinnen. Wir schreiben (11) als
$$C(x) = \frac{x}{1 - C(x)}$$
und erhalten (man beachte die Indexverschiebung)
$$c_n = [z^{n+1}]C(z) = \frac{1}{n+1}[x^n]\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}[x^n]\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n-1}{k}(-x)^k$$
$$= \frac{1}{n+1}[x^n]\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$
- Die Folge $(c_n) = (1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ...)$ ist die Folge der Catalan-Zahlen. Es ist die Folge A000108 in der On-line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS).
- Für sie gilt die aus (11) folgende Rekursionsformel $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.
- Es sind mehrere hundert verschiedene kombinatorische Probleme bekannt, die durch die Catalan-Zahlen abgezählt werden.

Allgemeinere Probleme

- Die erzeugende Funktion $C(z)$ der Catalan-Zahlen ist insofern speziell, als sie einer algebraisch lösbaren Gleichung genügt.

- Im allgemeinen kann man die Gleichungen nicht algebraisch lösen, während die Methode über die Inversionsformel oft zum Ziel führt.

Beispiel 6 *Vor etwa 2 Jahren haben Jins de Jong, Alex Hock und ich die verschiedenen Beiträge zu einer $2n$-Punktfunktion eines Matrixmodells untersucht. Diese Beiträge lassen sich als Catalan-Struktur von Catalan-Strukturen auffassen. Die erzeugende Funktion $D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} z^n$ erfüllt hier die Gleichung*

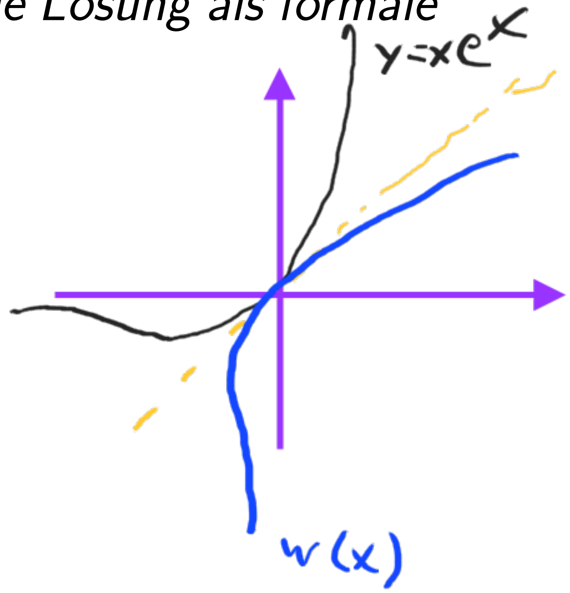
$$D(z)(1 - D(z))^2 = z \text{ oder } D(z) = \frac{z}{(1 - D(z))^2} .$$

Die Inversionsformel liefert

$$\begin{aligned} d_n = [z^{n+1}]D(z) &= \frac{1}{n+1}[x^n]\frac{1}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{1}{n+1}[x^n]\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2n-2}{k}(-x)^k \\ &= \frac{1}{n+1}[x^n]\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2n+k+1}{k}x^k = \frac{1}{n+1}\binom{3n+1}{n} . \end{aligned}$$

9 Die Lambertsche W-Funktion

Beispiel 7 *In vielen Problemen tritt die durch $W(z)e^{W(z)} = z$ implizit definierte Lambertsche W-Funktion $W(z)$ auf. Mit $W(z) = ze^{-W(z)}$ ergibt sich die Lösung als formale Potenzreihe*



$r(x)=e^{-x}$

$$[z^n]W(z) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]e^{-nx} = \frac{(-n)^{n-1}}{n(n-1)!}$$

Somit ist $W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$. Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{e}$.

Viele mathematische Gleichungen führen auf Lambert-W:

- der unendliche Potenzturm $x \uparrow\uparrow \infty := x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \dfrac{W(\log \frac{1}{x})}{\log \frac{1}{x}}$
- $x = a + b\,e^{cx}$ hat Lösung $x = a - \dfrac{1}{c} W(-bc\,e^{ac})$

`https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function` listet 18 Probleme aus Materialwissenschaften, Biologie, Chemie, Physik auf, deren Lösung durch Lambert-W beschrieben wird.

10 Integrale, die auf Lambert-W führen

Rückblickend war in unserem gegenwärtigen Forschungsprogramm die Lösung des folgenden Integrals ein ganz entscheidender Schritt:

Lemma 8 (Erik Panzer & RW) *Für alle $a, \lambda > 0$ und $b \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ gilt*

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\pi} \frac{\operatorname*{arctan}_{[0,\pi]}\Big(\frac{\lambda\pi}{1+a+t-\lambda\log t}\Big)}{1+t+b} = \log\left(\frac{b+\lambda\log(1+b)-a}{1+b-\lambda W\big(\frac{1}{\lambda}e^{(1+a)/\lambda}\big)}\right) . \qquad (12)$$

- Es ist Teil der exakten Lösung eines nichtlinearen Problems.
- Die weiteren Arbeiten (mit Alex Hock & Johannes Branahl) haben gezeigt, daß die Lösung etwas mit topologischer Rekursion zu tun hat, einer hochaktuellen Forschungsrichtung in der Mathematik.
- Arbeiten im Umfeld der topologischen Rekursion haben vielfältige und überraschenden Verbindungen zwischen mathematischen Teilbereichen etabliert.

Beweisidee

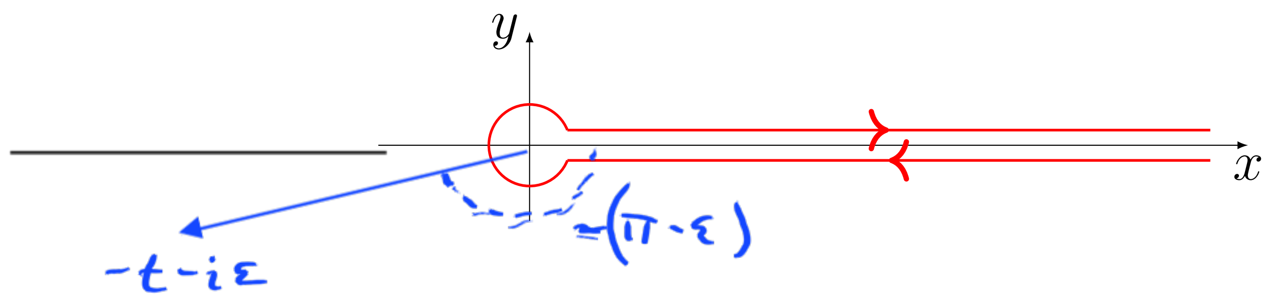
Den $\arctan$ kann man als Imaginärteil eines komplexen Logarithmus auffassen:

$$\arctan_{[0,\pi]}\left(\frac{\lambda\pi}{1+a+t-\lambda\log t}\right) = \lim_{\epsilon\to 0} \operatorname{Im}\log\Big(1+a+t+\mathrm{i}\epsilon-\lambda\log(-t-\mathrm{i}\epsilon)\Big)$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0} \operatorname{Im}\log\left(1-\frac{\lambda\log(-t-\mathrm{i}\epsilon)}{1+a+t+\mathrm{i}\epsilon}\right), \qquad (13)$$

da $(-t-\mathrm{i}\epsilon) = e^{-\mathrm{i}(\pi-\epsilon)}t$, folglich $\log(-t-\mathrm{i}\epsilon) = -\mathrm{i}(\pi-\epsilon)+\log t$. Somit

- $\operatorname{Im}\big(1+a+t+\mathrm{i}\epsilon-\lambda\log(-t-\mathrm{i}\epsilon)\big) = \epsilon+\lambda(\pi-\epsilon)$
- $\operatorname{Re}\big(1+a+t+\mathrm{i}\epsilon-\lambda\log(-t-\mathrm{i}\epsilon)\big) = 1+a+t-\lambda\log t$

Wegen $\operatorname{Im}(f(t+\mathrm{i}\epsilon)) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(f(t+\mathrm{i}\epsilon)-f(t-\mathrm{i}\epsilon))$ läßt sich das Integral als komplexes Contourintegral von (13) schreiben, das die positive reelle Achse umrundet.



$$\operatorname{Im}\log z = \arctan_{[0,\pi]} \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$$

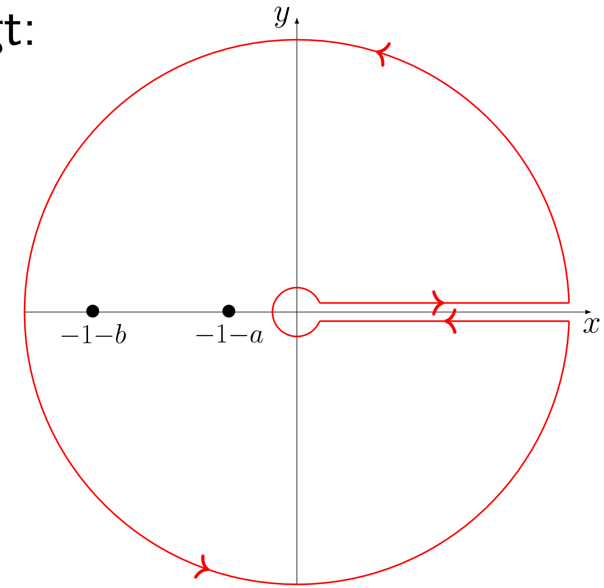
Nach Reihenentwicklung haben wir:

$$I_\lambda(a,b) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\epsilon} dz \frac{\log\left(1 - \frac{\lambda \log(-z)}{1+a+z}\right)}{1+b+z}$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\epsilon} dz \frac{(\log(-z))^n}{(1+a+z)^n (1+b+z)} \,. \qquad \left[(1+a+z)^{n-1}\right]$$

Der Konvergenzradius ist mindestens $\frac{1-\epsilon}{\sqrt{\pi^2+|\log\epsilon|^2}}$.

Wir schließen das Integral durch einen Kreisbogen von Radius R, der für $R \to \infty$ zum Integral nicht beiträgt:



Dieses Integral ist sofort über den Residuuensatz auszuwerten. Dieser liefert leicht bestimmbare Beiträge der Pole bei $z = -1-a$ und $z = -1-b$.

Das Ergebnis ist

$$I_\lambda(a,b) = -\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{(\log(-z))^n}{(1+b+z)}\Big|_{z=-1-a} - \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\frac{(\log(-z))^n}{(1+a+z)^n}\Big|_{z=-1-b}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}\frac{(-\log(1+a+w))^n}{(1+b-(1+a+w))}\Big|_{w=0} + \log\left(1-\frac{\lambda\log(1+b)}{a-b}\right).$$

Die Summe ist nun über die Lagrange-Bürmann-Formel (Theorem 3) zu gewinnen:

- Wir setzen $r(w) = -\log(1+a+w)$ und $h(w) = \log\frac{a-b}{a-b+w}$, dann ist

$$g(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}}(r(w))^n \Big|_{w=0}$$

  die Umkehrfunktion, die folgende Gleichung erfüllt:

$$g(\lambda) = \lambda\cdot r(g(\lambda)) = -\lambda\log(1+a+g(\lambda)).$$

- Die Lösung ist $g(\lambda) = \lambda W(\frac{1}{\lambda}e^{\frac{1+a}{\lambda}}) - 1 - a$ wegen $\log(W(u)) = \log u - W(u)$.
- Mit $h'(w) = \frac{1}{b-a-w}$ ist nach der Bürmann-Formel das Integral gegeben durch

$$I_\lambda(a,b) = \underbrace{\log\left(\frac{a-b}{a-b+\lambda W(\frac{1}{\lambda}e^{\frac{1+a}{\lambda}})-1-a}\right)}_{=h(g(\lambda))} + \log\left(\frac{a-b-\lambda\log(1+b)}{a-b}\right).$$