Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

SS 17

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 27.6.2017 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 9

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Funktion $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n$ mit $|a_k| < \frac{R^k}{n}$ für $R > 0$ alle Nullstellen in $K_R(0)$ hat.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktionen $f(z) = z^n$ und $g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_n$.)

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{(c)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,, \quad a, b > 0.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(5 - 3\sin(t))^2} \qquad \text{(b)} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos(t) + a^2}\,, \quad a \in K_1(0).$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

indem Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}} \qquad \text{mit} \qquad a = \sqrt{\pi}\, e^{\pi \mathrm{i}/4}$$

längs eines Parallelogramms mit den Ecken $-R, R, R + a$ und $-R + a$ integrieren und danach den Grenzübergang $R \to \infty$ durchführen. Benutzen Sie dabei die Identität

$$f(z) - f(z + a) = e^{-z^2}.$$