Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 17**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 4.7.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{1+x^2} \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)dx}{1+x^4}.$$

Zeigen Sie

$$\text{(c)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^5} = \frac{\pi}{5}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie bei (c) die Formel $\left(2\sin(4\pi/5)+\sin(2\pi/5) = \frac{5}{4}\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)$.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie

$$\text{(a)} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)dx}{1+x^3} = -\frac{2\pi^2}{27} \qquad \text{(b)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\cos(\pi\alpha/2)}, \qquad 0<\alpha<1.$$

Aufgabe 3. Sei R eine rationale Funktion ohne Pol auf $\mathbb{R}_+$ und mit mindestens zweifacher Nullstelle in ∞. Dann gilt für gerade k

$$\sum_{m=0}^{k/2} \binom{k+1}{2m} (\pi\mathrm{i})^{k+1-2m} \int_0^{\infty} dx R(x)(\ln(x))^{2m} = -\pi\mathrm{i} \sum_{a\in\mathbb{C}_+} \mathrm{res}_a \left(R(z)(\mathrm{Log}(e^{-\mathrm{i}\pi}z))^{k+1}\right).$$

und für ungerade k

$$\sum_{m=0}^{(k-1)/2} \binom{k+1}{2m+1} (\pi\mathrm{i})^{k-2m} \int_0^{\infty} dx R(x)(\ln(x))^{2m+1} = -\pi\mathrm{i} \sum_{a\in\mathbb{C}_+} \mathrm{res}_a \left(R(z)(\mathrm{Log}(e^{-\mathrm{i}\pi}z))^{k+1}\right).$$

Der Beweis funktioniert analog zur Vorlesung. Es werden die vier Wege $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ aus der Vorlesung von Seite 66 benutzt. Das Integral über den Weg γ_2 für $r\to\infty$ geht gegen 0, da $r(\ln(r))^{k+1}|R(z)|\to 0$ für $r\to\infty$. Das Integral über den Weg γ_4 für $\varrho\to 0$ geht gegen 0, da $\varrho(\ln(\varrho)+C)^{k+1}|R(z)|\to 0$ für $\varrho\to 0$. Dies gilt für alle $k\in\mathbb{N}$. Wie auch in der Vorlesung weiter gezeigt, bleiben die Integrale über γ_1 und γ_3 über. Die Logarithmen sind dann

$$(\mathrm{Log}(e^{\mathrm{i}\pi}z))^{k+1} = (\ln(t)-\mathrm{i}\pi)^{k+1} \qquad \text{auf} \qquad \gamma_1$$
$$(\mathrm{Log}(e^{\mathrm{i}\pi}z))^{k+1} = (\ln(t)+\mathrm{i}\pi)^{k+1} \qquad \text{auf} \qquad \gamma_3.$$

Diese beiden Wege sind in entgegengesetzter Richtung entlang von $\mathbb{R}_+$, weshalb die Differenz genommen wird.

$$(\ln(t) - i\pi)^{k+1} - (\ln(t) + i\pi)^{k+1} = \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} (\ln(t))^l (i\pi)^{k+1-l} \left((-1)^{k+1-l} - 1\right).$$

Für gerade k heben sich alle Terme mit ungeraden l weg, so daß $l = 2m$ gewählt werden kann. Für ungerade k heben sich alle Terme mit gerade l weg, so daß in diesem Fall $l = 2m + 1$ gewählt werden kann. Aus dem Residuensatz folgen die beiden Formeln.

(a) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{(\ln(x))^2 dx}{1 + x^2}.$$

(b) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{(\ln(x))^{2n+1} dx}{1 + x^2} = 0.$$

(*Hinweis:* Bei (b) führt die Betrachtung von $\int_0^1 \frac{(\ln(x))^{2n+1} dx}{1+x^2} + \int_1^\infty \frac{(\ln(x))^{2n+1} dx}{1+x^2}$ ebenfalls zum Ziel.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung des Kotangens

(a) $$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{(-1)^k}{z - k} + \frac{(-1)^k}{k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k 2z}{z^2 - k^2}$$

(b) $$\pi \tan(\pi z) = -\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - (k + \frac{1}{2})} + \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{8z}{(2k+1)^2 - 4z^2}.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie die Identitäten $1/\sin(z) = \cot(z/2) - \cot(z)$ und $\tan(z) = \cot(z) - 2\cot(2z)$.)