Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **SS 16**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, den 16.6.2016, 10 Uhr in den Briefkästen — Blatt 8

Aufgabe 1. Wir betrachten $\mathbb{C}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt und fassen Projektionen $P_U : \mathbb{C}^3 \to U$ für Untervektorräume $U \subseteq \mathbb{C}^3$ als Abbildungen $P_U : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ auf.

(a) Sei $u = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{C}^3$ und $\|u\| = 1$ sowie $U = \operatorname{span}(u)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $P_U \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{C}^3$.

(b) Seien $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^\top$ und $U = \operatorname{span}(u_1, u_2)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $P_U : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 2. Das *Kreuzprodukt* $v \times w$ zweier Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$ im $\mathbb{R}^3$ ist der Vektor

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $u, v, w, x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(a) $v \times w$ ist orthogonal zu v und w.

(b) $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$.

(c) $\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin\alpha$, wobei α den (kleineren) Winkel zwischen v und w bezeichne.

(d) Der Abstand zweier windschiefer Geraden $u + \mathbb{R}x$ und $v + \mathbb{R}y$ ist gegeben durch $|\langle u - v, x \times y\rangle| / \|x \times y\|$.

Aufgabe 3. Wir betrachten $\mathcal{C}([-1, 1])$ als unitären Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} dx\, \overline{f(x)} g(x).$$

Die *Legendre-Polynome* sind gegeben durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, daß das Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren für die Polynome $1, x, x^2$, betrachtet als Elemente von $\mathcal{C}([-1, 1])$, die Polynome $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ liefert.

(b) Sei $U = \operatorname{span}(1, x)$. Berechnen Sie $P_U(x^3)$ sowie $d(x^3, U)$.

Aufgabe 4. Wir betrachten $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ als unitären Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \overline{f(x)} g(x).$$

Seien $f, e_n \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ definiert durch $f(x) = x$ und $e_n(x) := \mathrm{e}^{inx}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_n := \langle e_n, f \rangle$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\|f\|^2$. Welche Gleichung für π^2 folgt aus der Gleichung $\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2$.