Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2014**
I. Ullisch

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 02.07.2014 bis 12h00, in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie für einen Körper K und beliebiges $x \in K$ die Determinante folgender $n \times n$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{pmatrix}$$

(in der alle Hauptdiagonalglieder gleich x und alle sonstigen Koeffizienten gleich 1 sind).

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome und die Eigenräume folgender Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & c-1 & 0 \\ 0 & 1 & c^2-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{Q}$;

(c) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$ rekursiv definierte *Fibonacci-Folge*.

(a) Zeigen Sie, daß es genau ein $A \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ gibt mit

$$A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix},$$

und geben Sie A explizit an.

(b) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$.
(*Hinweis:* Ist D eine Diagonal- und S eine invertierbare Matrix mit $A = SDS^{-1}$, so gilt $A^n = SD^nS^{-1}$.)

(c) Geben Sie eine geschlossene Formel für f_n, $n \in \mathbb{N}$, an.

Aufgabe 4. Es seien F, G Endomorphismen des n-dimensionalen Vektorraums V mit $F^2 = F$ und $G^2 = \mathrm{id}_V$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von F bzw. G.

(b) Zeigen Sie: V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von F. Im Falle $1_K + 1_K \neq 0$ gilt gleiches für G.