Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 2014**
I. Ullisch

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 18.06.2014 bis 12h00, in den Briefkästen Blatt 9

Aufgabe 1. Der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Untervektorraum, der von den Vektoren $(1,1,0,1), (1,-2,0,0), (1,0,-1,2)$ aufgespannt wird.

Aufgabe 2. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ und $x, y \in \mathbb{R}^3$ werde durch $\langle x, y\rangle_A := \langle x, Ay\rangle$ eine neues Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie durch das Verfahren von Gram-Schmidt <u>bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$</u> eine Orthonormalbasis von $U := \operatorname{span}(v_1, v_2)$ mit $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Bestimmen Sie <u>bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$</u> das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^3$.

(c) Berechnen Sie <u>bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$</u> den Abstand des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu U.

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gerade bzw. ungerade T-periodische Funktion, so hat die Fourier-Reihe von f die Gestalt

$$(Sf)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_T kx) \quad \text{bzw.} \quad (Sf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_T kx)\ .$$

Wie berechnen sich die Koeffizienten a_k, b_k aus f?

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung der Funktion $f(x) = x^4$ im Intervall $[-\pi, \pi]$.

(b) Zeigen Sie mit dem Ergebnis aus (a), daß gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$