Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **SS 2014**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 21.05.12 bis 12h00, in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Die *Beta-Funktion* $B(a,b)$ ist für alle Zahlen $a,b>0$ definiert durch $B(a,b)=\int_0^1 dx\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}$. Zeigen Sie:

(a) Das obige Integral konvergiert auch im Fall $0<a,b<1$.

(b) $B(a,1)=\frac{1}{a}$, $\quad B(a,b+1)=B(a,b)-B(a+1,b)$, $\quad bB(a+1,b)=aB(a,b+1)$.

(c) $B(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$ für $b>1$.

(d) $B(a,n)=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$ für $n\in\mathbb{N}^\times$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $B(a,b)=\displaystyle\int_0^\infty dy\,\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}$. (*Hinweis:* Substitution $x=\frac{y}{1+y}$)

(b) $B(a,b)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\sin^{2a-1}\varphi\,\cos^{2b-1}\varphi$. (*Hinweis:* Substitution $x=\sin^2\varphi$)

(c) $B(a,a)=\dfrac{1}{2^{2a-1}}B\left(\dfrac{1}{2},a\right)$ für $a>0$. (*Hinweis:* Substitution $x=\frac{1}{2}(1-\sqrt{z})$)

(d) $\displaystyle\int_0^1 dx\,x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}=\frac{1}{m}B\left(\frac{p}{m},q\right)$ für alle $p,q,m>0$.

Aufgabe 3. (a) Sei $a>0$ und sei $\gamma(b)$ für $b>0$ definiert durch

$$\gamma(b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}B(a,b).$$

Zeigen Sie, daß die so definierte Funktion γ die Voraussetzungen des Satzes von Bohr-Mollerup erfüllt, und schlußfolgern Sie die Formel $\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)B(a,b)$. (*Hinweis:* Höldersche Ungleichung)

(b) Zeigen Sie durch Kombination von Aufgaben 2(c), 3(a) sowie Satz 35.4 der Vorlesung den *Legendreschen Verdoppelungssatz*

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)\quad\text{für alle } a\in\mathbb{R}_+.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(a) $$\int_0^1 dx\, \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p}{n}+\frac{1}{2}\right)} \quad \text{für alle } p, n \in \mathbb{N},$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\, \tan^c x = \frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}} \quad \text{für alle } c \in \left]-1, 1\right[.$$

(*Hinweis:* Entdecken Sie durch Substitution die versteckte Beta-Funktion und nutzen Sie alle bisherigen Ergebnisse.)