Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **SS 2014**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: Mittwoch, 7.5.2014 bis 12h00, in den Briefkästen — Blatt 4

Aufgabe 1. Die *Legendre-Polynome* auf $[-1,1]$ sind gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Beweisen Sie mittels (mehrfacher) partieller Integration die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} dx\, f_n(x) f_m(x) = \frac{\delta_{nm}}{n+\frac{1}{2}}.$$

(Das Kronecker-Symbol ist definiert als $\delta_{mn} = 0$ für $m \neq n$ und $\delta_{nn} = 1$.)

Aufgabe 2. (a) Berechnen Sie

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\cos x \sin x + c\sin^2 x} \quad (ac - b^2 > 0).$$

(b) Zeigen Sie

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} dx\, \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8} = \pi.$$

(*Hinweise*: Substitution $x = y/\sqrt{2}$ und
$(y-1)(y^8-16) = (y^2-2)(y^2-2y+2)(y^5+y^4+2y^3-4)$.)

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, ob folgende Integrale existieren und geben Sie ggfs. die Werte an:

(a) $\int_0^\infty dx\ \mathrm{e}^{-zx}$ $(z \in \mathbb{C})$.

(b) $\int_0^\infty dx\ \sin^n x$ $(n \geq 1)$;

(c) $\int_0^\infty dx\ \frac{\ln x}{1+x^2}$;
(*Hinweis*: Betrachten Sie $\int_1^\infty dx\ \frac{\ln x}{1+x^2}$ mit der Substitution $x = \frac{1}{t}$.)

(d) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$;
(*Hinweise*: Substitution $\tan x = t^2$, Faktorisierung von $1 + t^4 = P(t)Q(t)$ als Produkt zweier Polynome vom Grad 2 und anschließende Partialbruchzerlegung.)

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit konvergentem Integral $\int_0^\infty dx\, f(x)$, so folgt $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

(b) Das Produkt zweier uneigentlich integrierbarer Funktionen ist wieder uneigentlich integrierbar.