Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 12**
Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 28.06.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -18 & 9 \\ 6 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) das charakteristische Polynom, (b) die Eigenwerte, (c) die Eigenräume und (d) eine Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2. Die Folge $(a_n)_n$ *Fibonacci-Zahlen* ist rekursiv definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n \geq 0$. Für jedes $n \geq 0$ sei $v^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie

(a) eine Matrix A, die $v^{(n+1)} = Av^{(n)} = A^n v^{(1)}$ für alle $n \geq 0$ erfüllt;

(b) die Eigenwerte und Eigenvektoren von A;

(c) Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ so, dass $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt;

(d) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Aufgabe 3. Prüfen Sie, ob beziehungsweise für welche Parameter $a, b, c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ folgende Matrizen $A \in M(n, \mathbb{C})$, $B \in M(3, \mathbb{C})$ diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 2-c & 1+c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Wir betrachten ein Polynom $p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X^1 + a_0$ mit komplexen Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0$ und eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Sei $p(A) := A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0E_n$. Zeigen Sie:

(a) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie einen Eigenvektor zu λ.)

(b) Ist λ' ein Eigenwert von $p(A)$, so gibt es einen Eigenwert λ von A mit $\lambda' = p(\lambda)$.
(*Hinweis:* Schreiben Sie $p(X)-\lambda' = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ mit geeigneten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$).