Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

SS 12

Probeklausur zur Mathematik für Physiker II

Vorbemerkungen:

- Die folgenden Aufgaben 1,3,5,6 waren Klausuraufgaben im SS 2010.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausur am 13.7. wird zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel zur Klausur ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Zur Teilnahme an der Klausur ist (außer für die Diplom-Studiengänge) eine Anmeldung im QISPOS erforderlich. Zur Aufteilung auf die beiden Hörsäle HS1 und M1 gibt es außerdem eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1639 oder id 1640. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 11.7.2012. Nach Möglichkeit wird versucht, die Anmeldungen im QISPOS und im Kursbuchungssystem zu vergleichen, um bei abweichenden Anmeldungen einen Hinweis zu geben. Melden Sie sich deshalb bitte nicht erst im letzten Moment an.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Die Probeklausur wird in der Vorlesung am 9.7.2012 vorgerechnet.

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $$\int_1^2 dx\, \frac{1}{x^3+2x^2}$$ b) $$\int_1^2 dx\, x \cdot 2^x$$

Aufgabe 2. Begründen Sie, daß das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 dx\, \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ konvergiert, und berechnen Sie dieses.

Aufgabe 3. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $r = \operatorname{rang}(A)$.

Bestimmen Sie Matrizen $L, R \in GL(3, \mathbb{R})$, so daß gilt $A(1) = L \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot R^{-1}$.
Hinweis: Beschränken Sie sich auf Umformungen, mit denen L eine Dreiecksmatrix bleibt.

Aufgabe 4. Für $a > \frac{1}{2\pi}$ sei $f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{a} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{a} \le x \le 2\pi \end{cases}$

a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k) = \langle e_k, f\rangle$ in der Fourierreihe $(Sf)(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle e_k, f\rangle e_k(x)$, wobei $e_k(x) := e^{ikx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\, \overline{f(x)}g(x)$.

b) Welche Formel ergibt sich unter der Annahme $f(x) = (Sf)(x)$ für $x = \frac{1}{2a}$?
Hinweis zur Kontrolle: Aus dieser Formel folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{6}k)}{k} = \frac{5\pi}{12}$.

Aufgabe 5. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie alle Eigenwerte von A sowie den Eigenraum zum zweitgrößten Eigenwert.

Aufgabe 6. Für $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $x, y \in \mathbb{R}^3$ werde durch $\langle x, y\rangle_A := \langle x, Ay\rangle$ eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie durch das Verfahren von Gram-Schmidt <u>bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$</u> eine Orthonormalbasis von $U := \operatorname{span}(v_1, v_2)$ mit $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Bestimmen Sie <u>bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$</u> das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^3$.

c) Berechnen Sie <u>bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$</u> den Abstand des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu U.