

Seminar

“Mathematische Strukturen der Quantenmechanik”

Sommersemester 2011

1. Physikalische Argumente

Bis auf wenige Ausnahmen schien gegen Ende des 19. Jahrhunderts die Physik weitgehend verstanden. Neue Experimente zur inneren Struktur der Atome und eine genauere Bestimmung des Strahlungsspektrums schwarzer Körper führten über semiklassische Zwischenstufen schließlich 1925–1927 zur Quantenmechanik. Sie implizierte eine radikale Änderung der klassisch-deterministischen Vorstellungen der Realität und motivierte in der Mathematik die Entwicklung der Theorie der Operatoralgebren. In diesem Vortrag sollen die entscheidenden experimentellen Fakten und ihre Unvereinbarkeit mit der klassischen Physik behandelt werden.

2. Observablen und Zustände

Beobachtbare physikalische Größen (wie z.B. Ort, Impuls, Energie) werden durch “Observable” beschrieben. Unter einigen technischen Annahmen läßt sich für die Menge der Observablen die Struktur einer Algebra \mathcal{O} einführen. Die Messung einer physikalischen Größe an einem physikalischen System wird als Zustand auf der Observablenalgebra beschrieben, d.h. als positives normiertes lineares Funktional $\omega : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$. Durch $\|A\| := \sup_{\omega} |\omega(A)|$ wird eine Norm auf \mathcal{O} eingeführt. Unter weiteren technischen Annahmen gibt es eine Erweiterung von \mathcal{O} zu einer C^* -Algebra \mathcal{A} . Die klassische Physik des Phasenraums wird durch eine kommutative C^* -Algebra beschrieben, die Quantenphysik durch eine nichtkommutative C^* -Algebra.

3. C^* -Algebren

In diesem Vortrag werden grundlegende Eigenschaften von C^* -Algebren bereitgestellt.

4. Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation und Weyl-Algebra

Die Observablen für die Messung von Ort q und Impuls p erfüllen nach Heisenberg die Relation $[q, p] = i$ und können nicht beide eine endliche Norm haben. Deshalb wird die Weyl C^* -algebra betrachtet, die von $U(\alpha) = e^{i\alpha q}$ und $V(\beta) = e^{i\alpha p}$ erzeugt wird, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Unter schwachen Regularitätseigenschaften garantiert ein Theorem von von Neumann, daß alle Darstellungen der Weyl-Algebra unitär äquivalent sind.

5. Die Schrödinger-Darstellung

Die Weyl-Operatoren U, V werden auf dem Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R})$ dargestellt als $(U(\alpha)\psi)(x) = e^{i\alpha x}\psi(x)$ und $(V(\beta)\psi)(x) = \psi(x + \beta)$. Zustände und Erwartungswerte werden in der Schrödinger-Darstellung ausgearbeitet. Außerdem soll in diesem Vortrag das *Superpositionsprinzip* diskutiert werden.

6. Die Zeitentwicklung

Aus physikalischen Gründen ist die zeitliche Entwicklung von Observablen $A \in \mathcal{A}$ durch eine einparametrische Gruppe von Automorphismen $A \mapsto \alpha_t(A)$ von \mathcal{A} zu beschreiben, $t \in \mathbb{R}$. Für eine irreduzible Darstellung π von \mathcal{A} auf einem Hilbert-Raum \mathcal{H} muß dann $\pi \circ \alpha_t$ unitär äquivalent zu π sein. Unter schwachen Regularitätsannahmen garantiert dann ein Theorem von Stone, daß $U(t) = e^{-iHt}$ für einen unbeschränkten selbstadjungierten (Hamilton-)Operator H auf \mathcal{H} .

7. Selbstadjungierte unbeschränkte Operatoren

Dieser Vortrag gibt eine Einführung in die Feinheiten selbstadjungierter unbeschränkter Operatoren.

8. Beispiele: Harmonischer Oszillator und Kastenpotential

Dieser Vortrag behandelt einige wichtige exakt lösbare Zeitentwicklungen. Der harmonische Oszillator ist wichtig für die Quantenfeldtheorie, das Kastenpotential demonstriert den Tunneleffekt. Beim harmonischen Oszillator und bei geeigneten Kastenpotentialen hat der Hamilton-Operator H diskretes Spektrum.

9. Das Wasserstoff-Atom

Das Wasserstoff-Atom läßt sich ebenfalls geschlossen lösen. Die Diskretheit (eines Teils) des Spektrums des Hamilton-Operators ist beispielhaft für die diskreten

Linien in den Strahlungsspektren der Sterne sowie von heißen Gasen.

10. Interpretation der Quantenmechanik als stochastischer Prozeß

Zustände auf kommutativen C^* -Algebren definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem zugehörigen Hausdorff-Raum. Auf der nur durch $U(\alpha)$ generierten C^* -Algebra wird dann der Ort zu einer Gaußschen Zufallsvariable. Andererseits besteht zumindest formale Ähnlichkeit zwischen der Schrödinger-Gleichung und der Wärmeleitungs- bzw. Diffusionsgleichung. Letztere hat nach Einstein eine Interpretation als stochastischer Prozeß (Brownsche Bewegung, Irrfahrten, Wiener-Prozeß).

11. Das Pfadintegral

Feynman konnte eine Integralkern-Darstellung von e^{-itH} angeben für $H = -\Delta + V$, wobei Δ der Laplace-Operator ist und V ein geeignetes Potential. Feynmans Pfadintegralformel erlaubt eine brauchbare Störungstheorie, welche sich insbesondere in die Quantenfeldtheorie verallgemeinert. Sie führt auch zu bemerkenswerten Verbindungen zur Topologie.

12. Die Feynman-Kac-Formel

Während Feynmans Pfadintegralformel nur eine formale Bedeutung hat, läßt sich nach Kac dem Operator e^{-tH} ($t > 0$, nach unten beschränkter Hamilton-Operator H) rigoros ein Integralkern zuordnen.