Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Funktionalanalysis

Abgabe: Bis 05.07.2011, 12 Uhr Blatt 12

In den folgenden Aufgaben sei $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ stets ein komplexer Hilbertraum.

Aufgabe 1. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H.

(a) Sei $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Zeige, dass es genau dann ein $T_\alpha \in \mathcal{L}(H)$ mit $T_\alpha v_n = \alpha_n v_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, wenn $\alpha \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

(b) Seien $\alpha, \beta \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Bestimme nach Möglichkeit Folgen $\gamma, \delta \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ mit $T_\alpha T_\beta = T_\gamma$ und $(T_\alpha)^* = T_\delta$.

(c) Unter welchen Bedingungen an $\alpha \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ ist T_α normal/selbstadjungiert?

(d) Unter welchen Bedingungen an $\alpha \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ ist T_α beschränkt invertierbar? Bestimme gegebenenfalls eine Folge $\beta \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ mit $(T_\alpha)^{-1} = T_\beta$.

Aufgabe 2. Sei $E \in \mathcal{L}(H)$ *idempotent*, also $E^2 = E$. Zeige:

(a) $(\mathrm{Id}_H - E)$ ist ebenfalls idempotent und $E(H) = \ker(\mathrm{Id}_H - E)$.

(b) $E(H)$ ist abgeschlossen, $E(H) \cap \ker E = 0$ und $E(H) + \ker E = H$.

(c) E braucht nicht normal zu sein.
(*Hinweis:* Finde ein möglichst einfaches Gegenbeispiel im Fall $H = \mathbb{C}^2$.)

Aufgabe 3. Sei $P \in \mathcal{L}(H)$ wieder idempotent, also $P^2 = P$.

(a) Sei $\|P\| \leq 1$ und $u \in (\ker P)^\perp$. Zeige schrittweise, dass $\langle u, u - Pu\rangle = 0$, $\|u\| = \|Pu\|$ und $\|u - Pu\|^2 = 0$.

(b) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

$$i)\quad \|P\| \leq 1, \qquad ii)\quad P(H) \perp \ker P, \qquad iii)\quad P = P^*.$$

Sind diese Aussagen erfüllt, so nennt man P eine *orthogonale Projektion.*
(*Hinweis:* Zeige i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) und ii)+iii) $\Rightarrow$ i).)

Aufgabe 4. Für je zwei Vektoren $u, v \in H$ ist der zugehörige *Ket-bra-Operator* $T_{u,v} \in \mathcal{L}(H)$ definiert durch $T_{u,v}w = \langle v, w\rangle u$ für alle $w \in H$.

(a) Bestimme $\|T_{u,v}\|$ und $(T_{u,v})^*$ in Abhängigkeit von $u, v \in H$.

(b) Bestimme $RT_{u,v}$ und $T_{u,v}S$ für $R, S \in \mathcal{L}(H)$ und $u, v \in H$.

(c) Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ ein Operator mit endlich-dimensionalem Bild und $u_1, \dots, u_n$ eine Orthonormalbasis von $S(H)$. Zeige, dass $S = T_{u_1,S^*u_1} + \cdots + T_{u_n,S^*u_n}$.